Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 6

УДК 513.88 **МАТЕМАТИКА**

И. В. БОЙКОВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ НАХОЖДЕНИИ ВСЕХ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 24 I 1974)

В заметке рассматриваются вопросы приближенного нахождения всех решений уравнений вида $Kx \equiv Ix + \lambda Hx = f$. Эти вопросы для линейных уравнений изучались в ([1]).

1. Пусть E — банахово пространство, K — фредгольмов оператор (Ф-оператор), множество нулей которого $N(K)$ есть подпространство $E_\alpha \subset E$ размерности α с базисом $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\alpha$; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\alpha$ — множество функционалов из сопряженного пространства E^*, составляющих подпространство $E_\alpha{}^*$, таких, что $(\varphi_i, \gamma_j) = \delta_{ij}$ *. Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\alpha$ — базис в дефектном пространстве $N^*(K)$. Через $z_1, z_2, \ldots, z_\alpha$ обозначены элементы из E такие, что $(z_k, \psi_j) = \delta_{kj}$. Рассмотрим уравнение

$$Kx \equiv Ix - \lambda_0 Tx = f. \tag{1}$$

Пусть $(f, \psi_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, \alpha$. Так как $\alpha \neq 0$, то K необратим. Пользуясь конструкцией Шмидта ([2]), уравнение (1) запишем в виде **

$$\tilde{K}x \equiv Kx + \sum (x, \gamma_i) z_i = f + \sum \xi_i z_i, \quad \xi_k = (x, \gamma_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \alpha. \tag{2}$$

Из (2) следует, что $x^* = u^* + \sum \eta_i \varphi_i$, где $u^* = \tilde{K}^{-1} f$, η_i — произвольные числовые параметры, есть решение уравнения (1). Нахождение u^* в общем случае затруднительно и требуются приближенные методы. Пусть E_n ($E_n{}^*$) — подпространство E (E^*), P_n ($P_n{}^*$) — оператор проектирования E (E^*) на E_n ($E_n{}^*$). В качестве приближенного уравнения возьмем

$$K_n x_n \equiv x_n - \lambda_0 T_n x_n = f_n = P_n f.$$

Пусть $\|T - P_n T\|_E \leqslant \varepsilon_1^{(n)}$, $\|P_n T - T_n\|_{E_n} \leqslant \varepsilon_2^{(n)}$; $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \ldots, \lambda_{0k}$ — собственные значения уравнения $K_n x_n = 0$, сходящиеся при $n \to \infty$ к λ_0. Через X_{0i} ($X_{0i}{}^*$), $i = 1, 2, \ldots, k$, обозначим корневые подпространства уравнения $x_n - \lambda_{0i} T_n x_n = 0$ (и его сопряженного). Обозначим через φ_{in} (ψ_{in}), $i = 1, 2, \ldots, \alpha$, те линейно независимые элементы из $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} X_{0i}$ ($\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} X_{0i}{}^*$), которые стремятся к φ_i (ψ_i), $i = 1, 2, \ldots, \alpha$; γ_{in}, z_{in} вводятся аналогично γ_i, z_i, $i = 1, 2, \ldots, \alpha$. Введем уравнение

$$\tilde{K}_n x_n \equiv x_n - \lambda_0 T_n x_n + \sum (x_n, \gamma_{in}) z_{in} = f_n.$$

Пользуясь оценками ([3]) и предполагая, что $\|z_i - P_n z_i\| \leqslant \varepsilon_1^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, \alpha$, имеем $\|\tilde{K} - P_n \bar{K}\| \leqslant A_1 \varepsilon^{(n)}$, $\|P_n \bar{K} - \bar{K}_n\| \leqslant A_2 (\varepsilon_2^{(n)})^{1/l}$, где l — ранг λ_0.

Теорема 1. *Пусть K — Ф-оператор и выполнены условия близости K и K_n. Тогда при n таких, что $q = A_3 [\varepsilon_1^{(n)} + (\varepsilon_2^{(n)})^{1/l}] < 1$, где l — ранг λ_0, уравнение $\tilde{K}_n x_n = f_n$ имеет решение $u_n{}^*$ и $x_n{}^* = u_n{}^* - \sum \eta_i \varphi_{in}$. Общая форма приближенного решения уравнения* (1).

---

* (φ_i, γ_j) — значение функционала γ_j на элементе φ_i.

** Если не оговорено противное, то в пп. 1, 2 $\sum^\alpha$ означает суммирование по соответствующему индексу от 1 до α.

Справедлива оценка

$$\|x^*-x_n^*\|\leqslant A_4(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\alpha)\,[\varepsilon_1^{(n)}+(\varepsilon_2^{(n)})^{1/l}+\|f-f_n\|],$$

где $x^*=u^*+\sum\eta_i\varphi_i$ — *общее решение уравнения* (1), A_4 *зависит от* $|\eta_1|$, $|\eta_2|, \ldots, |\eta_\alpha|$.

2. Рассмотрим уравнение $Kx=Ix-Hx=0$, где H — нелинейный оператор из E в E, дифференцируемый по Гато в некоторой окрестности точки x_0, причем производная $K'(x_0)$ необратима в E. Пусть φ_i, γ_i, ψ_i, z_i, $i=1, 2, \ldots, \alpha$, имеют тот же смысл, что и в п. 1, но связаны теперь с оператором $K'(x_0)$.

Уравнение $Kx=0$ преобразовывается в систему

$$\bar{K}'(x_0)x\equiv K'(x_0)x+\sum(x, \gamma_i)z_i=-Ix+Hx+K'(x_0)x+\sum\xi_i z_i, \tag{3}$$

$$\xi_k=(x, \gamma_k), \quad k=1, 2, \ldots, \alpha. \tag{4}$$

Пусть в сфере $S(x_0, r)$ выполняется условие $\|(\bar{K}'(x_0))^{-1}\|\,\|K'(x_1)-K'(x_2)\|\leqslant q$, $0<q<1$. Уравнение (3) решается модифицированным методом Ньютона — Канторовича (м.м.Н.К).

$$x_{n+1}=[\bar{K}'(x_0)]^{-1}[-Kx_n+K'(x_0)x_n+\sum\xi_i z_i],$$

где ξ_i — определяемые ниже фиксированные постоянные.

Из ([5]) следует сходимость этого метода к решению $x^*(\xi_1, \ldots, \xi_\alpha)$. Значения ξ_i, $i=1, 2, \ldots, \alpha$, определяются из уравнения разветвления

$$(Kx^*(\xi_1, \ldots, \xi_\alpha)-K'(x_0)x^*(\xi_1, \ldots, \xi_\alpha), \psi_k)=0, \quad k=1, 2, \ldots, \alpha.$$

Найдя все значения ξ_i, $i=1, 2, \ldots, \alpha$, и подставив их в $x^*(\xi_1, \ldots, \xi_\alpha)$, получим все решения уравнения $Kx=0$, находящиеся в окрестности x_0.

Заменим уравнение $Kx=0$ «близким» к нему уравнением $K_nx_n\equiv Ix_n-H_nx_n=0$, заданным в E_n. Пусть: 1) $\|H'(x_0)-P_nH'(x_0)\|_E+\|P_nH'(x_0)-H_n'(x_0)\|_{E_n}\leqslant\varepsilon_1^{(n)}$; 2) $\|Kx-K_nP_nx\|\leqslant\varepsilon_2^{(n)}(x)$. При достаточно больших n м.м.Н.К., примененный к уравнению *

$$\bar{K}_n'(x_0)x_n\equiv K_n'(x_0)x_n+\sum(x_n, \gamma_{in})z_{in}=\sum\xi_{in}z_{in}+(K_n'(x_0)-I+H_n)x_n,$$

сходится к решению $x_n^*(\xi_{1n}, \ldots, \xi_{\alpha n})$ и справедлива оценка

$$\|x^*(\xi_1, \ldots, \xi_\alpha)-x_n^*(\xi_{1n}, \ldots, \xi_{\alpha n})\|\leqslant A_5[(\varepsilon_1^{(n)})^{1/l}+\varepsilon_2^{(n)}(x_n^*)+\max_{1\leqslant i\leqslant\alpha}|\xi_i-\xi_{in}|],$$

где l — ранг собственного значения 1 оператора $K'(x_0)$. Значения ξ_{in} определяются из уравнений

$$(K_nx_n^*(\xi_{1n}, \ldots, \xi_{\alpha n})-K_n'(x_0)x_n^*(\xi_{1n}, \ldots, \xi_{\alpha n}), \psi_{kn})=0, \quad k=1, 2, \ldots, \alpha.$$

Теперь нужно оценить $|\xi_i-\xi_{in}|$, $i=1, 2, \ldots, \alpha$. Здесь появляется две возможности: а) якобиан уравнения разветвления для точного уравнения не равен 0; б) он равен 0. В случае а) из известных оценок метода Ньютона — Канторовича следует, что $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant\alpha}|\xi_i-\xi_{in}|\leqslant A_6(\varepsilon_1^{(n)}+\varepsilon_2^{(n)})$. В случае б) необходимо изучить устойчивость уравнения разветвления вблизи точки ветвления.

---

* Здесь ξ_{in}, z_{in} имеют тот же смысл, что и в п. 1, но относятся к оператору $K_n'(x_0)$.

3. **Рассмотрим** уравнение разветвления с комплексными коэффициентами $L_{k\nu}$ и числовым параметром λ

$$\sum_{k\geq 2} L_{k0}\xi^k+\sum_{k\geq 0} \xi^k \sum_{\nu\geq 1} L_{k\nu}\lambda=0. \quad (5)$$

Пусть $L_{m0}=\min\limits_k L_{k0}$ среди $L_{k0}\neq 0$, $L_{nl}=\min\limits_k(\min\limits_\nu L_{k\nu})$ среди $L_{k\nu}\neq 0$, $L_{ij}=$ $=\min\limits_\nu(\min\limits_k L_{k\nu})$ среди $L_{k\nu}\neq 0$. Для применения к (5) итерационных методов сделаем замену $\xi=(a+\eta\lambda^\varepsilon)\lambda^\delta$, где $a=\mathrm{const}$, определяемая ниже, ε и δ выбираются так, чтобы после подстановки ξ в (5) у двух слагаемых из суммы $L_{m0}\xi^m+L_{nl}\xi^n\lambda^l+L_{ij}\xi^i\lambda^j$ коэффициентами при η служило бы λ в одинаковой степени, меньшей, чем степень λ в третьем слагаемом. Пусть ими будут $L_{m0}\xi^m$ и $L_{nl}\xi^n\lambda^l$. Тогда (при $m>n$) $\xi=(a+\eta\lambda^\varepsilon)\lambda^{l/(m-n)}$, $\varepsilon=l/2(m-n)$. Подставляя ξ в (5), получаем несколько уравнений вида $\eta=A(\eta,\lambda)$, решение которых при малых значениях λ можно находить методом простой итерации. Если же в уравнении (5) суммирование производится не до бесконечности, а до ν в первой сумме, до $\varkappa$ во второй и до μ в третьей, то оно приводится к уравнениям вида $\eta=\tilde{A}(\eta,\lambda)$. Оценив близость решений уравнений $\eta=A(\eta,\lambda)$ и $\eta=\tilde{A}(\eta,\lambda)$, видим, что

$$\max_i|\xi_i-\xi_{in}|\leq A_7\lambda^{\varepsilon+\beta+l/(m-n)}$$

$$(\beta=\min\{(\nu l-m(l+{}^1/_2)+n/2)/(m-n),\ \mu+1,\ \varkappa l-m(l+{}^1/_2)+n/2)/(m-n)\})$$

при достаточно малых значениях λ $(\nu,\ \varkappa>m)$.

Аналогично рассматривается многомерный случай ветвления.

4. Рассмотрим сингулярные интегральные уравнения (с.и.у.) видов

$$Kx\equiv a(t)x(t)+b(t)\int_\gamma\frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+\lambda\int_\gamma\frac{h(t,\tau)x(\tau)\,d\tau}{|\tau-t|^\delta}\equiv$$

$$\equiv ax+bS_\gamma(x)+\lambda U_\gamma(h(t,\tau)|\tau-t|^{-\delta}x(\tau))=f(t). \quad (6)$$

$$Fx\equiv d(t)x(t)+S_L(k(t,\ \tau)x(\tau))=f(t), \quad (7)$$

$$Gx\equiv c(t,x(t))+S_L(g(t,\tau,x(\tau)))=f(t), \quad (8)$$

где γ — единичная окружность с центром в начале координат, $L=(\overset{\smile}{c_1},\ c_2)$ — ее сегмент, $a,\ b,\ c,\ d,\ g,\ f,\ h,\ k\in H_\alpha$, $0<\alpha<1$, всюду на соответствующих контурах, кроме точки $t=1$, a и b имеют разрыв первого рода, $0\leq\delta<1$.

Приближенное решение уравнений типа (6) изучалось в ([4]).

Приближенное решение уравнений (6)—(8) ищется в виде полинома $\tilde{x}(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n}\alpha_k t^k$, коэффициенты которого находятся из систем

$$\tilde{K}\tilde{x}\equiv P_t[a(t)\tilde{x}(t)+b(t)S_\gamma(\tilde{x}(\tau))+\lambda U_\gamma(P_\tau[h(t,\ \tau)d(t,\ \tau)\tilde{x}(\tau)])]= =P_t[f(t)], \quad (9)$$

$$\tilde{F}\tilde{x}\equiv\bar{P}_t[\bar{d}(t)\tilde{x}(t)+S_\gamma(P_\tau[\bar{k}(t,\ \tau)\tilde{x}(\tau)])]=\bar{P}_t[\bar{f}(t)], \quad (10)$$

$$\tilde{G}\tilde{x}\equiv\bar{P}_t[\bar{c}(t,\tilde{x}(t)+S_\gamma(P_\tau[\bar{g}(t,\tau,\tilde{x}(\tau))])]=\bar{P}_t[\bar{f}(t)], \quad (11)$$

где $P,\ \bar{P},\ d(t,\ \tau)$ введены в ([5]); $\bar{d}(t)=d(t)$, $\bar{k}(t,\ \tau)=k(t,\ \tau)$, $\bar{f}(t)=f(t)$, $\bar{c}(t,\ \tilde{x}(t)=c(t,\ \tilde{x}(t))$, $\bar{g}(t,\ \tau,\ \tilde{x}(\tau))=g(t,\ \tau,\ \tilde{x}(\tau))$ при $t,\ \tau\in L$; $\bar{d}(t)=1$, $\bar{k}(t,\tau)=\bar{f}(t)=\bar{g}(t,\tau,\tilde{x}(\tau))=0$, $\bar{c}(t,\tilde{x}(t))=\tilde{x}(t)$ при $t,\ \tau\notin L$.

Теорема 2. *Пусть K непрерывно обратим. Тогда при n таких, что $q=A_8[n^{|\eta|-1}+n^{-\alpha(1-\delta)}]<1$, система уравнений (9) имеет единственное решение $\tilde{x}^*$ и справедлива оценка* * $\|x^*-\tilde{x}^*\|\leq A_9q$, *где x^* — решение уравне-*

* Оценки в пп. 4, 5 приводятся в метрике L_2.

ния (6), $(t-1)^{\eta+i\theta}\omega(t)$ *— решение краевой задачи* $\Phi^+(t)=[(a(t)-b(t))/(a(t)+b(t))]\Phi^-(t)$.

Теорема 3. *Пусть* F *непрерывно обратим. Тогда при* n *таких, что* * $q=A_{10}[n^{-\alpha}\ln n+n^{|\eta|-1}]<1$, *система уравнений* (10) *имеет единственное решение* $\tilde{x}^*$ *и справедлива оценка* $\|x^*-\tilde{x}^*\|\leqslant A_{11}q$, *где* x^* *— решение уравнения* (7).

Теорема 4. *Пусть уравнение* (8) *имеет в сфере* S *единственное решение* x^*, *оператор* $G'(x^*)$ *непрерывно обратим и* $c_u'(t, u)$, $g_u'(t, \tau, u)\in H_\alpha$, $1/2<\alpha<1$, $t, \tau\in L$. *Тогда при* n *таких, что* ** $q=A_{12}\ln^2 n(n^{|\eta|-1}+n^{-\alpha+1/2})<1$, *система уравнений* (11) *имеет в сфере* $S_1\subset S$ *единственное решение* $\tilde{x}^*$ и *справедлива оценка* $\|x^*-\tilde{x}^*\|\leqslant A_{13}q$.

5. Пусть в уравнении (6) (при $f\equiv 0$) оператор $a(t)x(t)+b(t)S_\gamma(x(\tau))$ непрерывно обратим, а λ — собственное значение.

Теорема 5. *Пусть собственное значение* λ_0 *уравнения* (6) ($f\equiv 0$) *имеет ранг* l_0 *и пусть* $\{\lambda_n\}$ *— последовательность собственных значений уравнения* (9), *сходящихся к* λ_0. *Справедливы оценки* $|\lambda_0-\lambda_n|\leqslant A_{14}[n^{-\alpha(1-\delta)}+n^{|\eta|-1}]$, $\rho(x_n, X_0)\leqslant A_{15}|\lambda_0-\lambda_n|$, *где* x_n *— собственный элемент уравнения* (9), *а* X_0 *— собственное подпространство уравнения* (6).

Теперь описанный в п.1 алгоритм приближенного нахождения всех решений уравнений с Ф-операторами, можно применить к уравнению (6).

Автор признателен проф. Б. М. Гагаеву за внимание к работе.

Пензенский политехнический институт

Поступило 10 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. В. Иванов, И. Б. Симоненко*, ДАН, т. 126, № 6, 1172 (1959). [2] *М. М. Вайнберг, В. А. Треногин*, Теорема ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969. [3] *М. А. Красносельский и др.*, Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969. [4] *В. В. Иванов*, Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, Киев, 1968. [5] *И. В. Бойков*, ДАН, т. 203, № 3, 511 (1972).

* $(t-c_1)^{\eta_1+i\theta_1}(t-c_2)^{\eta_2+i\theta_2}\omega(t)$ — решение краевой задачи $\Phi^+(t)=[(a(t)-h(t, t))/(a(t)+h(t, t))]\Phi^-(t)$, $|\eta|=\max(|\eta_1|, |\eta_2|)$.

** $(t-c_1)^{\eta_1+i\theta_1}(t-c_2)^{\eta_2+i\theta_2}\omega(t)$ — решение краевой задачи $\Phi^+(t)=[(a^*(t)-h^*(t))/(a^*(t)+h^*(t))]\Phi^-(t)$, $a^*(t)=a_u'(t, x^*(t))$, $h^*(t)=h_u'(t, t, x^*(t))$, $|\eta|=\max(|\eta_1|, |\eta_2|)$.