Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 5

УДК 517.539+513.88 *МАТЕМАТИКА*

В. А. ТКАЧЕНКО

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 4 II 1974)

1. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k f = 0, \tag{1}$$

где $D=d/dz$, со всяким решением $f(z)$ связывается ряд

$$f(z) \sim \sum \operatorname{Res}[\omega_f(\mu)\varphi^{-1}(\mu)\exp(\mu z)], \tag{2}$$

в котором $\omega_f(\mu)$ — некоторая целая функция, а $\varphi(\mu)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\mu^k$. Каждое слагаемое ряда (2) имеет вид $P(z)\exp(\mu z)$, где $P(z)$ — полином, и удовлетворяет уравнению (1).

Центральное место в теории уравнения (1) занимает проблема аппроксимации произвольного решения линейными комбинациями таких «элементарных» решений, вопрос о сходимости разложения (2) и проблема единственности соответствующего представления. Аналогичные проблемы возникают при построении общего решения уравнения свертки $\Phi[f(z+\zeta)]=0$ и при исследовании подпространств, инвариантных относительно дифференцирования.

Первые результаты по проблемам аппроксимации, разложения и единственности указанного типа в комплексной области были получены Л. Шварцем [1], А. О. Гельфондом [2], А. Ф. Леонтьевым [3] и Ж. П. Каханом [4]. В последующих работах А. Ф. Леонтьева и его сотрудников получены теоремы разложения и единственности как для решений уравнения (1), так и для произвольных элементов различных пространств голоморфных функций, отвечающие более общей, чем d/dz, операции D в уравнении (1). Весьма полное изложение истории вопроса и достигнутых здесь результатов можно найти в обзорах [5].

В настоящей заметке излагаются результаты по спектральной теории некоторого линейного оператора в локально-выпуклом пространстве, которая дает новый подход к задачам единственности, аппроксимации и разложения. Развиваемый здесь метод позволяет с единой позиции получить как известные, так и новые результаты.

2. Пусть заданы число $\rho>0$ и такая последовательность $\{h_k(\theta)\}_1^\infty$ непрерывных 2π-периодических функций, что $h_k(\theta)<h_{k+1}(\theta)$ при всех k и θ. Обозначим через $\mathscr{F}_k$ банахово пространство целых функций, наделенное нормой

$$\|\varphi\|_k = \sup_{r,\,\theta}|\varphi(re^{i\theta})|\exp[-h_k(\theta)r^\rho], \quad k=1, 2, \ldots$$

Индуктивный предел [6] семейства $\{\mathscr{F}_k\}$ обозначим через $\mathscr{F}$, а его сопряженное, являющееся пространством Фреше — через $\mathscr{E}$.

П р е д л о ж е н и е. *Пространства $\mathscr{F}$ и $\mathscr{E}$ являются совершенно полными монтелевскими пространствами.*

Обозначим через D непрерывный линейный оператор в $\mathscr{E}$, сопряженный с оператором умножения на независимую переменную в пространстве $\mathscr{F}$, и через L_φ — его сужение на аннулятор вектора $\varphi \in \mathscr{F}$, $\varphi(\lambda) \neq 0$.

Т е о р е м а 1. *Спектр $\sigma(L_\varphi)$ оператора L_φ совпадает с множеством нулей функции $\varphi(\lambda)$. Если $\mu \notin \sigma(L_\varphi)$, то резольвента $R(\mu, L_\varphi) \equiv (L_\varphi - \mu)^{-1}$ определяется равенством* *

$$\langle R(\mu, L_\varphi) f, \psi \rangle = -\langle f, [\varphi(\lambda)\psi(\mu) - \varphi(\mu)\psi(\lambda)](\lambda-\mu)^{-1} \rangle \varphi^{-1}(\mu)$$

для любых $f \in \mathscr{E}$ и $\psi \in \mathscr{F}$.

3. Пусть $k=1, 2\ldots$ — все различные нули функции $\varphi(\lambda)$, а p_k, $k=1, 2\ldots$, — их кратности. С каждым элементом f свяжем систему векторов

$$\mathfrak{R}_f = \{f_{jk} \in \mathscr{E}: \quad f_{jk} = \operatorname*{Res}_{\mu_k} (\mu-\mu_k)^j R(\mu, L_\varphi) f; \quad k=1, 2, \ldots; \; j=0, \ldots, p_k-1\}$$

и ряд

$$f \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{\mu_k} R(\mu, L_\varphi) f. \tag{3}$$

Имеют место следующие теоремы единственности и аппроксимации.

Т е о р е м а 2. *Если $\varphi \in \mathscr{F}$ — целая функция с бесконечным числом нулей, то из обращения в нуль всех членов ряда (3) следует $f=0$.*

Т е о р е м а 3. *Каждый элемент $f \in \mathscr{E}$ из области определения всех степеней оператора L_φ, является пределом в $\mathscr{E}$ последовательности конечных линейных комбинаций системы векторов $\mathfrak{R}_f$.*

С л е д с т в и е. *Область определения всех степеней оператора L_φ совпадает с замыканием в $\mathscr{E}$ линейной оболочки системы его собственных и присоединенных векторов* **.

Назовем пространство $\mathscr{F}_m^*$, сопряженное с пространством $\mathscr{F}_m$, τ-допустимым, если существует такой номер p, что для заданного числа τ выполняются неравенства $h_m(\theta) < h_p(\theta) - \tau$.

Будем говорить, что пространство $\mathscr{F}_s^*$ τ-подчинено функции $h_m(\theta)$, если существует такая тригонометрически выпуклая функция $h(\theta) \geqslant 0$ и такой номер p, что для заданного числа τ выполняются неравенства $h_s(\theta) < h_m(\theta) + h(\theta) < h_p(\theta) - \tau$.

Справедливы следующие теоремы разложения.

Т е о р е м а 4. *Пусть для функции $\varphi \in \mathscr{F}_k$ существует такая числовая последовательность $R_N \uparrow \infty$, для которой*

$$\ln|\varphi(R_N e^{i\theta})| \geqslant \sigma(\theta) R_N^\rho \tag{4}$$

при некоторой непрерывной функции $\sigma(\theta)$, и пусть $\tau = \max_\theta [h_k(\theta) - \sigma(\theta)]$. Если $\mathscr{F}_k^*$ — τ-допустимое пространство, то каждый вектор f из области определения всех степеней оператора L_φ допускает представление

$$f = -\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{R_{p-1} < |\mu_k| < R_p} \operatorname*{Res}_{\mu_k} R(\mu, L_\varphi) f, \tag{5}$$

сходящееся в топологии всякого пространства F_s^*, τ-подчиненного функции $h_k(\theta)$. В каждом таком пространстве $\mathscr{F}_s^*$ остаток ряда (5) оценивается величиной порядка $\exp(-\alpha_s R_N^\rho)$, где $\alpha_s > 0$.

---

* $\langle g, \psi \rangle$ есть значение функционала $g \in \mathscr{E}$ на функции $\psi \in \mathscr{F}$.

** Отметим, что теоретико-функциональной основой доказательства теорем 2 и 3 является теорема о возможности разложения функций нормального типа при порядке $\rho > 0$ на «эквивалентные» сомножители. Эта теорема для $\rho=1$ была получена И. Ф. Красичковым-Терновским (7), а при любом ρ — В. С. Азарным (8).

Теорема 5. *Пусть для функции* $\varphi\in\mathcal{F}_k$ *на некоторой последовательности окружностей* $|\mu|=R_N$ *выполнена оценка* (4), *пусть* $\tau=\max[h_k(\theta)-\sigma(\theta)]$ *и пусть* $\mathcal{F}_k{}^*-\tau$*-допустимое пространство.*

Тогда представление (5) *имеет место во всяком пространстве* $\mathcal{F}_m{}^*$, *для которого* $\sigma(\theta)-h_m(\theta)\geqslant\varepsilon>0$, *причем в каждом таком пространстве остаток ряда* (5) *оценивается величиной порядка* $\exp(-\alpha_m R_N{}^\rho)$, *где* $\alpha_m>0$.

4. В заключение мы приведем некоторые конкретные реализации изложенной выше схемы.

a) Если $\rho=1$ и $h_k(\theta)\equiv k$, $k=1, 2, \ldots$, то $\mathcal{E}$ можно реализовать как пространство $\mathcal{E}_\infty$ всех целых функций с топологией равномерной сходимости на каждом компакте.

b) Если $\rho>1$ и $h_k(\theta)\equiv\rho^{-1}(\sigma p)^{-q}(1-k^{-1})$ при $p=\rho(\rho-1)^{-1}$, $q=(\rho-1)^{-1}$, то $\mathcal{E}$ изоморфно пространству $\mathcal{E}[p, \sigma]$ целых функций типа не выше σ при порядке ρ с естественной топологией.

В примерах a) и b) $D=d/dz$ и разложение (5) сводится к ряду Дирихле (1).

c) При $\rho>0$ и $h_k(\theta)\equiv\sigma R^\rho(1-k^{-1})$ в качестве $\mathcal{E}$ получаем пространство $\mathcal{H}_R$ функций, голоморфных в круге $|z|<R$ с топологией равномерной сходимости на внутренних компактах. Каждой целой функции $F(\lambda)=\sum a_k\lambda^k$, $F(0)=1$, для которой $a_k\neq0$ и $\lim k^{1/\rho}|a_k|^{1/k}=(\sigma l\rho)^{1/\rho}$ соответствует такая реализация пространства $\mathcal{E}$, что D оказывается оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда — Леонтьева [9] по функции $F(\lambda)$, а ряд (3) функции $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_kz^k$ принимает вид

$$f(z)\sim\sum\operatorname{Res}[\omega_f(\mu)\varphi^{-1}(\mu)F(\mu z)] \tag{6}$$

при $\omega_f(\mu)\sum_{k=0}^{\infty}c_k(D^{k-1}f(0)+\ldots+\mu^{k-1}f(0))$. Собственные и присоединенные векторы оператора L_φ в этом случае являются линейными комбинациями функций $F(\mu_k, z)$, $F'(\mu_k z)z$ и т. д.

d) Пространство $\mathcal{H}_\rho(\Omega)$ функций, голоморфных в ρ-выпуклой области Ω [10], содержащей точку $z=0$, получится, если в качестве $\{h_k(\theta)\}_1{}^\infty$ взять последовательность ρ-опорных функций ρ-выпуклых компактов, исчерпывающих область Ω. Разложение (3) записывается в виде (6), где $F(\lambda)$ — функция Миттаг-Леффлера $E_\rho(\lambda, 1)$, $\omega_f(\mu)=\langle f, \Phi_\mu\rangle$ и Φ_μ — обобщенное преобразование Бореля функции $(\varphi(\lambda)-\varphi(\mu))(\lambda-\mu)^{-1}$ по E_ρ [13]. При $\rho=1$ требование $0\in\Omega$ можно опустить и в качестве D получится оператор d/dz в выпуклой области Ω.

Теорема аппроксимации 3 для пространства $\mathcal{E}_\infty$ совпадает с известной теоремой Л. Шварца [1]. Утверждение теоремы 3 и следствие из нее для пространства $\mathcal{H}_1(\Omega)$ получены ранее И. Ф. Красичковым-Терновским [11]. Теорема единственности 2 для функции из подпространства, порожденного в $\mathcal{H}_1(\Omega)$ неполной системой экспоненциальных полиномов, сводится к теореме Ж.-П. Кахана [4]. Соответствующий результат для произвольной функции в пространствах $\mathcal{H}_1(\Omega)$ и (при условии $0\in\Omega$) $\mathcal{H}_\rho(\Omega)$ был ранее получен А. Ф. Леонтьевым [12, 5в]. Теорема 4 в применении к пространству $\mathcal{H}_R$ дает теорему А. О. Гельфонда — А. Ф. Леонтьева [9], а для пространства $\mathcal{H}_1(\Omega)$ — теорему Д. Диксона [13]. В случае, когда $h_k(\theta)>0$ и (4) выполняется при $\sigma(\theta)=h_k(\theta)-\varepsilon$ с любым $\varepsilon>0$ и $N>N(\varepsilon)$, теорема 5 эквивалентна теореме разложения В. Х. Мусояна [14], которая обобщает теорему А. Ф. Леонтьева [15а].

Отметим еще, что изложенные результаты позволяют исследовать разложения в пространствах функций вида $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_kP_k(z)$, где функции

$P_k(z)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, асимптотически близки к $a_k z^k$, но не обязательно голоморфны. При этом оператору D отвечает оператор сдвига в коэффициентах. Исследования таких разложений имеются в работах ([15б], [16]).

Я искренне благодарен Б. Я. Левину за постоянный интерес к работе и советы, которые помогли улучшить изложение результатов.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
21 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *L. Schwartz,* Ann. Math., B. 48, № 4 (1947). [2] *А. О. Гельфонд,* Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 38 (1951). [3] *А. Ф. Леонтьев*, УМН, т. 3, 4 (26) (1948); Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 39 (1951). [4] *J.-P. Kahane*, Sur quelques problèmes d'unicite et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles Thèse, Durand, 1954. [5] *А. Ф. Леонтьев*, а) УМН, т. 11, 5 (71) (1956); б) Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, т. 2 (1964); в) УМН, т. 24, 2 (146), (1969). [6] *Н. Бурбаки*, Топологические векторные пространства, М., 1959. [7] *И. Ф. Красичков-Терновский,* Матем. сборн., т. 87 (129), № 4 (1972). [8] *В. С. Азарин,* Там же, т. 90 (132), № 2 (1973). [9] *А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев,* Там же, т. 29 (71), № 3 (1951). [10] *М. М. Джрбашян,* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966. [11] *И. Ф. Красичков-Терновский,* Матем. сборн., т. 88 (130), № 1 (1972); Функциональный анализ и его приложения, т. 7, в. 4 (1973). [12] *А. Ф. Леонтьев*, Матем. сборн., т. 72 (114), № 2 (1967). [13] *G. D. Dickson,* Trans. Am. Math. Soc., v. 110, № 2 (1964). [14] *В. Х. Мусоян,* ДАН, т. 164, № 1 (1965). [15] *А. Ф. Леонтьев,* а) ДАН, т. 164, № 1 (1965); б) Матем. заметки, т. 1, № 6 (1967). [16] *А. П. Хромов,* ДАН, т. 209, № 2 (1973).