

УДК 513.81+512.9

МАТЕМАТИКА

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД, И. И. КОЛОКОЛЬЦЕВА, В. В. МАЛЮТИН

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

(Представлено академиком А. Д. Александровым 13 II 1974)

И. Л. Кантором ⁽¹⁾ и М. Кехером ⁽²⁾ определены алгебры Ли, являющиеся прямыми суммами двух экземпляров некоторой йордановой алгебры и линейного пространства, состоящего из левых сдвигов той же йордановой алгебры и коммутаторов пар таких левых сдвигов. И. Л. Кантор ⁽¹⁾ показал, что в некоторых случаях группу Ли, соответствующую этой алгебре Ли, можно рассматривать как группу дробно-линейных преобразований указанной йордановой алгебры, надлежащим образом расширенной. При этом в случае простых йордановых алгебр соответствующие группы Ли также являются простыми, а в случае квазипростых йордановых алгебр — квазипростыми группами Ли ^(3, 4). В настоящей работе показывается, что все простые и квазипростые группы Ли, определяемые указанным образом по простым и квазипростым йордановым алгебрам, можно представить как группы дробно-линейных преобразований этих йордановых алгебр, надлежащим образом расширенных, и указываются геометрические интерпретации этих групп.

Мы будем пользоваться обозначениями простых и квазипростых йордановых алгебр, введенными в ⁽³⁾; п. 1 написан Б. А. Розенфельдом, п. 2 — В. В. Малютиным, п. 3 — И. И. Колокольцевой.

1. Простые и квазипростые йордановы алгебры. Йордановыми алгебрами называются алгебры с умножением $x \circ y = y \circ x$, в которых условие ассоциативности заменено условием $(x \circ (y \circ y)) \circ y = (x \circ y) \circ (y \circ y)$. Всякой ассоциативной алгебре A соответствует йорданова алгебра A^+ с теми же элементами, причем умножение $x y$ алгебры A заменяется умножением $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. Йордановы алгебры с таким умножением могут быть получены и из подпространств ассоциативных алгебр, инвариантных относительно умножения $x \circ y$. В некоторых случаях йордановы алгебры получаются аналогичным образом и из неассоциативных алгебр.

Как известно (см., например, ⁽¹⁾), вещественными компактными простыми йордановыми алгебрами (алгебрами с компактными группами автоморфизмов) являются: А) алгебра $\bar{J}_n(i)$ комплексных эрмитово-симметричных n -матриц ($X = \bar{X}^T$), В) алгебра J_n вещественных симметричных n -матриц ($X = X^T$), С) алгебра $\bar{J}_n(i, j)$ кватернионных эрмитово-симметричных n -матриц, D) алгебра J_k элементов клиффордовых алгебр K_n ⁽⁵⁾, стр. 450) вида $\alpha = a^0 + a^i e_i$, Е) алгебра $\bar{J}_3(i, j, l)$ октавных эрмитово-симметричных 3-матриц. Вещественные простые некомпактные йордановы алгебры, имеющие те же комплексные формы, отличаются от компактных алгебр заменой условий $X = \bar{X}^T$ и $X = X^T$ соответственно условиями $X = -E_l \bar{X}^T E_l$ и $X = E_l X^T E_l$, где E_l — диагональная матрица с элементами ± 1 , среди которых -1 встречается l раз; заменой элементов клиффордовой алгебры K_n элементами клиффордовой алгебры ${}^l K_n$ ⁽⁵⁾, стр. 450); будем обозначать такие йордановы алгебры соответственно $\bar{J}_n(i)$, J_n , $\bar{J}_n(i, j)$, ${}^l J_k$ и ${}^l J_3(i, j, l)$; заменой поля $R(i)$ комплексных чисел алгеброй $R(e)$

двойных чисел $a+be$, $e^2=+1$, тела кватернионов $R(i, j)$ алгеброй $R(i, e)$ антикватернионов $a+bi+ce+dj$, $i^2=-1$, $e^2=+1$, $ie=-ei=j$ и альтернативно-го тела $R(i, j, l)$ октав альтернативной алгеброй $R(i, j, e)$ антиоктав ⁽⁵⁾, стр. 441 и 535); будем обозначать такие йордановы алгебры соответственно $\bar{J}_n(e)$, $\bar{J}_n(i, e)$, $\bar{J}_n(i, j, e)$; при этом алгебра $\bar{J}_n(e)$ изоморфна алгебре $J_{2n}=R_n^+$ вещественных n -матриц, а алгебра $\bar{J}_n(i, e)$ изоморфна алгебре J_{2n} вещественных $2n$ -матриц, удовлетворяющих условию $X=J^{-1}X^TJ$, где J — $2n$ -матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; в случае алгебр A) и B) при четном n

имеются также некомпактные йордановы алгебры $J_{n/2}(i, j)=R_{n/2}^+(i, j)$ кватернионных $(n/2)$ -матриц и алгебра $\bar{J}_{n/2}(i, j)$ кватернионных $(n/2)$ -матриц, удовлетворяющих условию $X=i\bar{X}^Ti$. Вещественные квазипростые йордановы алгебры получаются из простых заменой алгебр R_n , $R_n(i)$, $R_n(i, j)$ n -матриц алгебрами R_n^m , $R_n^m(i)$ и $R_n^m(i, j)$ вещественных, комплексных и кватернионных n -квазиматриц и клиффордовых алгебр K_n и K_n квазиклиффордовыми алгебрами K_n^m и ${}^{kl}K_n^m$ ⁽⁶⁾ и заменой алгебр $R(i)$ и $R(e)$ алгеброй $R(\varepsilon)$ дуальных чисел $a+b\varepsilon$, $\varepsilon^2=0$, алгебр $R(i, j)$ и $R(i, e)$ алгебрами $R(i, \varepsilon)$ и $R(e, \varepsilon)$ полукватернионов и полуантикватернионов ⁽⁵⁾, стр. 443) и алгебр $R(i, j, l)$ и $R(i, j, e)$ аналогично определяемыми алгебрами $R(i, j, \varepsilon)$ и $R(i, e, \varepsilon)$ полуоктав и полуантиоктав.

2. Геометрические интерпретации дробно-линейных преобразований йордановых алгебр классов A, B, C и E. И. Л. Кантор ⁽¹⁾ показал, что простым йордановым алгебрам J_{2n} , J_n , $J_{2n}(i)$, $\bar{J}_{2n}(i, j)$ и $\bar{J}_n(i, j)$ соответствуют простые группы Ли, являющиеся фундаментальными группами проективного пространства P_{2n-1} , симплектического пространства Sp_{2n-1} , гиперболического пространства ${}^nS_{2n-1}$, эрмитовых гиперболических пространств ${}^n\bar{S}_{2n-1}(i)$ и ${}^n\bar{S}_{2n-1}(i, j)$ и эрмитова симплектического пространства $\bar{S}p_{2n-1}(i, j)$ ⁽⁵⁾, стр. 352; ⁽⁷⁾), причем эти группы представляются дробно-линейными преобразованиями

$$'X=(AX+B)(CX+D)^{-1} \quad (1)$$

в указанных йордановых алгебрах, где n -матрицы A, B, C и D являются подматрицами $2n$ -матриц соответствующих групп, а элементы X йордановых алгебр изображают точки некоторых 2-редуктивных пространств. Б. А. Розенфельд ⁽⁴⁾ показал, что эти 2-редуктивные пространства допускают геометрические интерпретации в виде соответственно многообразий $(n-1)$ -плоскостей пространства P_{2n-1} , нулевых $(n-1)$ -плоскостей пространства Sp_{2n-1} , $(n-1)$ -плоских образующих абсолютов пространств ${}^nS_{2n-1}$, ${}^n\bar{S}_{2n-1}(i)$ и ${}^n\bar{S}_{2n-1}(i, j)$ и нулевых $(n-1)$ -плоскостей пространства $\bar{S}p_{2n-1}(i, j)$; при этом йордановы алгебры дополняются идеальными элементами таким образом, что элементы расширенных йордановых алгебр находятся во взаимно однозначном соответствии с соответствующими многообразиями $(n-1)$ -плоскостей. Геометрический смысл представлений этих многообразий расширенными йордановыми алгебрами состоит в том, что элементы этих йордановых алгебр во всех рассматриваемых здесь случаях являются аффинными матричными координатами ⁽⁸⁾, стр. 387) $(n-1)$ -плоскостей соответствующих типов.

М. П. Замаховский ⁽⁴⁾ показал, что квазипростым йордановым алгебрам J_{2n}^m , J_n^m , $J_{2n}^m(i)$, $\bar{J}_{2n}^m(i, j)$ и $\bar{J}_n^m(i, j)$ соответствуют квазипростые группы Ли, являющиеся фундаментальными группами биквазиаффинного пространства P_{2n-1}^{2m-1} ⁽⁹⁾, квазисимплектического пространства Sp_{2n-1} ⁽¹⁰⁾, стр. 366), квазигиперболического пространства ${}^{m, n-m}S_{2n-1}^{2m-2n}$ ⁽¹⁰⁾, стр. 285),

эрмитовых квазигиперболических пространств ${}^{m, n-m}\bar{S}_{2n-1}^{2m-1}(i)$ ⁽⁸⁾ и

$m, n-m \bar{S}_{2n-1}^{2m-1}(i, j)$ ⁽¹¹⁾ и эрмитова квазисимплектического пространства $\bar{S}p_{2n-1}^{2m-1}(i, j)$ ⁽¹²⁾, причем элементы X йордановых алгебр также изображают точки некоторых 2-редуктивных пространств, допускающих геометрические интерпретации в виде соответственно многообразий параболических $(n-1)$ -плоскостей пространства P_{2n-1}^{2m-1} , специальных нулевых $(n-1)$ -плоскостей пространства Sp_{2n-1}^{2m-1} , специальных $(n-1)$ -плоских образующих абсолютных конусов пространств $m, n-m \bar{S}_{2n-1}^{2m-1}$, $m, n-m \bar{S}_{2n-1}^{2m-1}(i)$

и $m, n-m \bar{S}_{2n-1}^{2m-1}(i, j)$ и специальных нулевых $(n-1)$ -плоскостей пространства $\bar{S}p_{2n-1}^{2m-1}(i, j)$; здесь йордановы алгебры также дополняются идеальными элементами таким образом, что элементы расширенных йордановых алгебр находятся во взаимно однозначном соответствии с соответствующими многообразиями $(n-1)$ -плоскостей. Эти группы также представляются дробно-линейными преобразованиями (1) в соответствующих йордановых алгебрах, а n -матрицы A, B, C и D являются подматрицами $2n$ -матриц соответствующих групп. Геометрический смысл представлений этих многообразий расширенными йордановыми алгебрами состоит в том, что элементы этих йордановых алгебр во всех рассматриваемых здесь случаях являются аффинными матричными координатами $(n-1)$ -плоскостей соответствующих типов.

В случае йордановых алгебр $\bar{J}_3(i, j, l)$, $\bar{J}_3(i, j, e)$, $\bar{J}_3(i, j, \varepsilon)$ и $\bar{J}_3(i, e, \varepsilon)$ соответственные 2-редуктивные пространства по аналогии с рассмотренными можно назвать многообразиями нулевых 2-плоскостей пространств $\bar{S}p_3(i, j, l)$ и $\bar{S}p_3(i, j, e)$ и многообразиями специальных нулевых 2-плоскостей пространств $\bar{S}p_3(i, j, \varepsilon)$ и $\bar{S}p_3(i, e, \varepsilon)$; соответствующие группы являются простыми и квазипростыми группами класса E_7 ; представления этих групп не записываются в целом виде (1), а записываются только инфинитезимально с помощью соответствующих алгебр Ли (для случая $\bar{S}p_3(i, j, l)$ см. ^(2, 13)).

3. Геометрические интерпретации дробно-линейных преобразований йордановых алгебр класса D . В случае простых йордановых алгебр Jk_n и Jk_n И. Л. Кантор ⁽¹⁾ ограничился представлением алгебр Ли соответствующих групп Ли, являющихся группами движений гиперболических пространств ${}^1S_{n+1}$ и ${}^{1+1}S_{n+1}$, указав, что эти группы являются группами конформных преобразований пространств C_n и 1C_n , интерпретируемых на абсолютах указанных гиперболических пространств (⁽¹⁰⁾; стр. 119, 210). Покажем, что эти группы могут быть представлены дробно-линейными преобразованиями алгебр Jk_n и Jk_n . Для этого заметим, что М. А. Джавадовым ⁽¹⁴⁾ (см. также ⁽⁵⁾, стр. 523–531) были предложены геометрические интерпретации спинорных представлений групп движений пространств 1S_n , при которых клиффордовы алгебры ${}^1K_{n+1}$ изображаются в виде 2-матриц над алгебрами ${}^{1-l}K_{n-1}$ при $l = 1$ — над алгеброй K_{n-1} , а спинорные представления записываются в виде ${}^1X^0 = AX^0 + BX^1$, ${}^1X^1 = CX^0 + DX^1$, где A, B, C и D — элементы указанных 2-матриц, играющие роль координат спиноров; геометрическая интерпретация состоит в том, что элементы X^0, X^1 рассматриваются как координаты точек абсолюта пространства 1S_n . Переходя от элементов X^0 и X^1 к элементу $X = X^0(X^1)^{-1}$, можем записать движение пространства в виде (1), где элементы X изображают точки абсолюта, за исключением точек его пересечения с некоторой касательной плоскостью. Элементы X при $n=2m$ и $n=2m+1$ имеют соответственно вид

$$X = \frac{\sum x^i e_{01 \dots i-1 \ i+1 \dots 2m-2}}{x^{2m-1} + x^{2m}}, \quad X = \frac{\sum x^i e_{01 \dots i-1 \ i+1 \dots 2m-2} + x^{2m+1} e_{01 \dots 2m+1}}{x^{2m-1} + x^{2m}}.$$

Умножая эти элементы на элемент $e_{12} \dots e_{2m-2}$, переведем их в элементы

$$X = \frac{x^0 + \sum_i (-1)^i e_{0i}}{x^{2m-1} + x^{2m}}, \quad X = \frac{x^0 + \sum_i (-1)^i e_{0i} - x^{2m+1} e_{0 \dots 2m+1}}{x^{2m-1} + x^{2m}},$$

которые можно рассматривать как элементы йордановой алгебры ${}^{l-1}\mathbf{Jk}_n$, при $l=1$ — алгебры $\mathbf{Jk}_n$. Отображение абсолютов пространств ${}^l S_{n+1}$ и ${}^{l+1} S_{n+1}$ на йордановы алгебры $\mathbf{Jk}_n$ и ${}^l \mathbf{Jk}_n$ можно произвести с помощью стереографической проекции. Таким образом, группы движений пространств ${}^l S_{n+1}$ и ${}^{l+1} S_{n+1}$ представляются дробно-линейными преобразованиями (1) йордановых алгебр $\mathbf{Jk}_n$ и ${}^l \mathbf{Jk}_n$, где элементы A, B, C и D образуют 2-матрицы, изображающие элементы клиффордовых алгебр $\mathbf{K}_n$ и ${}^l \mathbf{K}_n$ принадлежащие к спинорной группе гиперболического пространства. Геометрический смысл этого представления состоит в том, что координаты элементов X соответствующих йордановых алгебр с точностью до знаков совпадают с аффинными координатами точек абсолютов гиперболических пространств.

Т. Г. Орловской ⁽⁶⁾ построена теория спинорных представлений квазиэллиптических и квазигиперболических пространств ${}^{10} S_{n+1}^m$ и ${}^{h+1, l} S_{n+1}^m$,

на которые естественно обобщается геометрическая интерпретация М. А. Джавадова. Совершенно аналогично показывается, что группы дви-

жений пространств ${}^{16} S_{n+1}^m$ и ${}^{h+1, l} S_{n+1}^m$ представляются дробно-линейными преобразованиями (1) йордановых алгебр $\mathbf{Jk}_n^m$ и ${}^{hl} \mathbf{Jk}_n^m$, где элементы A, B, C и D образуют 2-матрицы, изображающие элементы алгебр ${}^{10} \mathbf{K}_n^m$ и ${}^{h, l} \mathbf{K}_n^m$, принадлежащие к спинорным группам квазигиперболических пространств. Геометрический смысл этой интерпретации состоит в том, что координаты элементов X соответствующих йордановых алгебр с точностью до знаков совпадают с аффинными координатами точек абсолютных конусов квазигиперболических пространств.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
6 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Л. Кантор, Тр. семин. по вект. и тенз. анализу при МГУ, т. 13, 1966.
² М. Koecher, Am. J. Math., v. 89, № 3 (1967); т. 90, № 2 (1968). ³ Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский, Изв. ВУЗов, матем., № 8 (1971). ⁴ Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский, Тр. семин. по вект. и тенз. анализу при МГУ, т. 16, 1972.
⁵ Б. А. Розенфельд, Неевклидовы геометрии, М., 1965. ⁶ Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский и др., Изв. ВУЗов, матем., № 4 (1969). ⁷ Л. В. Румянцева, Тр. семин. по вект. и тенз. анализу при МГУ, т. 12, 1963. ⁸ Б. А. Розенфельд, Многомерные пространства, М., 1966. ⁹ Т. М. Богуславская, И. Н. Семенова, Уч. зап. Моск. обл. пед. инст., т. 262, 1969. ¹⁰ Б. А. Розенфельд, Неевклидовы пространства, М., 1969.
¹¹ Л. П. Андреева, Т. М. Богуславская, Уч. зап. Моск. обл. пед. инст., т. 253, 1969.
¹² И. М. Горжалан, Уч. зап. Моск. гос. пед. инст., т. 271, 1967. ¹³ Н. Freudenthal, Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet., v. A57, № 3 (1954). ¹⁴ М. А. Джавадов, ДАН, т. 86, № 4 (1952).