Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 1

УДК 517.945.7 *МАТЕМАТИКА*

Р. С. САКС

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 II 1974)

В работе изучаются краевые задачи в ограниченной области D, диффеоморфной шару n-мерного эвклидова пространства, для системы дифференциальных уравнений

$$d\omega+\lambda*\omega=\gamma \tag{1}$$

и ее подсистем

$$(d+\lambda*)(\omega^k+\omega^{n-k-1})=\gamma^{k+1}+\gamma^{n-k},\quad k=0,1,\ldots; \tag{1_k}$$

здесь d — оператор внешнего дифференцирования, $*$ — известный [1,2] оператор нулевого порядка; λ — отличная от нуля постоянная; дифференциальная форма γ задана и такова, что γ и $d\gamma$ принадлежат классу $C^{1,\alpha}(\overline{D})$, $0<\alpha<1$, а форма ω ищется в классе $C^{2,\alpha}(\overline{D})$; ω^k и γ^k — составляющие форм ω и γ степени k. В работе [3] показано, что на римановом многообразии без края система (1) нётерова в указанных пространствах.

Настоящая работа является продолжением работы [4], в которой изучена структура систем (1) и (1_k) и поставлены следующие краевые задачи.

Задача I. Найти решение системы (1_k), $2k+1\neq n$, класса $C^{2,\alpha}(\overline{D})$, удовлетворяющее на границе $L\in A^{2,\alpha}$ области D одному из следующих краевых условий:

$$\beta\omega^p=\vartheta^p \text{ на } L,\quad p=k \text{ либо } p=n-k-1, \tag{2}$$

где β — заданный дифференциальный оператор первого порядка нулевой степени, ϑ^p — форма класса $C^{2,\alpha}(L)$.

Если область D удовлетворяет условиям: а) D выпукла по направлению оси x_n, б) D содержит поверхность S, заданную уравнением $x_n=s(x')$, где $s(x')\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, Ω — проекция области D на плоскость $x_n=0$ и L' — край поверхности S, то форму ω можно представить в виде $\omega^k=\varphi_1^k+\varphi_2^{k-1}\wedge dx_n$ через формы φ_1 и φ_2, не содержащие дифференциала dx_n.

Задача II. В области D, удовлетворяющей условиям а) и б), найти решение системы (1_k) при $n=2k+1$ класса $C^{2,\alpha}(\overline{D})$, удовлетворяющую следующим краевым условиям:

$$\beta_2\varphi_2^{k-1}\wedge dx_n=\vartheta_2 \text{ на } L, \tag{3}$$

$$\beta_1\varphi_1^k=\vartheta_1 \quad\text{на}\quad L'\subset L, \tag{4}$$

где β_1 и β_2 — дифференциальные операторы, заданные на S и в D соответственно, ϑ_1 и ϑ_2 — формы, заданные на L' и L класса $C^{2,\alpha}$.

Системы (1) и (1_k) не являются эллиптическими, но вместе с уравнениями

$$\delta\omega^p=\hat{\gamma}^{p-1},\ p=1,2,\ldots,n,\quad \hat{\gamma}^{p-1}\equiv\lambda^{-1}\delta*^{-1}\gamma^{n-p}, \tag{5}$$

где δ — оператор, сопряженный d по римановской двойственности [2], которые вытекают из (1) и (1_k), так как $d^2\omega=0$, они формально образуют переопределенные эллиптические системы. Мы укажем условия на операторы β, β_1 и β_2, при выполнении которых задачи I и II нётеровы.

Любая компонента ω^p системы (1) удовлетворяет также уравнению

$$(-\Delta-\lambda^2\hat{w})\,\omega^p=\tilde{\gamma}^p, \quad \tilde{\gamma}^p\equiv\hat{d}\gamma+\delta\gamma-\lambda*w\gamma, \tag{6}$$

где $-\Delta\varphi=(d\delta+\delta d)\varphi$ — оператор Лапласа, $\hat{w}\varphi^p=(-1)^{(p+1)(n-p)}\varphi^p \quad \forall p$.

Доказано ([4]), что задача 1 эквивалентна краевой задаче (2) относительно $\omega^p\in C^{3,\alpha}(\bar{D})$, удовлетворяющей уравнениям (5), (6). Так как $\psi^{p-1}\equiv\equiv\delta\omega^p-\hat{\gamma}^{p-1}$ удовлетворяет уравнениям

$$(-\Delta-\lambda^2\hat{w}_p)\,\psi^{p-1}=0, \quad \delta\psi^{p-1}=0, \tag{7}$$

то нетрудно показать, что при задании касательной компоненты

$$t\psi^{p-1}=0 \text{ на } L \tag{8}$$

задача (7), (8) имеет конечное число линейно независимых решений, так что уравнение (5) обеспечивается условием (8) и требованием ортогональности ψ к базису решений задачи (7), (8). Тогда в силу известных результатов для эллиптических систем ([5, 6]) справедлива

Теорема 1. *Если задача* (2), (8) *для системы* (6) *удовлетворяет условию Шапиро-Лопатинского, то задача* 1 *нётерова.*

Нетрудно проверить, что оператор $\beta\equiv t$ удовлетворяет условию теоремы 1.

В частности, для системы (1_k) при $k=0$, $p=0$ справедлива ([7])

Теорема 2. *Задача* I *при* $k=0$, $p=0$ *фредгольмова, если* (2) *удовлетворяет условию Шапиро-Лопатинского для оператора Лапласа.*

Так как задача Дирихле для уравнения

$$\Delta\omega^0+(-1)^n\lambda^2\omega^0=-\tilde{\gamma}^0$$

фредгольмова, а при несобственном $(-1)^n\lambda^2$ безусловно разрешима ([7]), то имеем

Следствие 1. *Задача* I *при* $k=0$, $p=0$ *и* $\beta=t$ *безусловно и однозначно разрешима, если* $(-1)^n\lambda^2$ *не является собственным значением задачи Дирихле для оператора Лапласа.*

Перейдем к задаче I при $n=2k+1$. Пусть $\tilde{\omega}^k$ — частное решение уравнения (6) при $p=k$. Используя вспомогательную задачу Дирихле для однородного уравнения (6) при $p=k$, приведем, следуя ([3]), задачу (2), (5), (6) с $p=k$ к эквивалентной системе псевдодифференциальных уравнений на L (вообще говоря переопределенной). Можно показать, что полученная система эллиптична тогда и только тогда, когда задача (2), (1_k), (5) при $p=k$ удовлетворяет условию Шапиро-Лопатинского ([8]), т. е. соответствующая однородная задача на полупрямой имеет только тривиальное решение.

В работе ([9]) доказано существование псевдодифференциального оператора, обеспечивающего необходимые и достаточные условия согласования, при выполнении которых система нётерова. Таким образом, мы приходим к теореме.

Теорема 3. *Если задача* (1_k), (2), (6) *при* $p=k$, $n=2k+1$ *удовлетворяет условию Шапиро-Лопатинского, то однородная задача* I *имеет конечное число линейно независимых решений, неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнены некоторые вполне определенные условия согласования на* γ^{k+1} *и* ϑ^k.

В работе ([4]) доказано, что задача II эквивалентна задаче (3) для эллиптической системы

$$\begin{gathered}(-\Delta-\lambda^2 w)\,\varphi_2^{k-1}=\tilde{\gamma}_2^{k-1}, \\ \delta'\varphi_2^{k-1}=\hat{\gamma}_2^{k-2}\end{gathered} \tag{9}$$

и краевой задаче

$$\beta_1 R\psi_0^k = \vartheta_1 - \beta_1\tilde{\varphi}_1 \text{ на } \Gamma \tag{10}$$

относительно формы $\psi_0^k(x')$, удовлетворяющей системе

$$d'\psi_0^k(x') = 0, \quad \delta'\psi_0^k(x') = 0, \quad x' \in \Omega, \tag{11}$$

где R — оператор, стоящий в левой части формулы (10) в ([4]) при $x_n = s(x')$, Γ — граница области Ω, а d' и δ' — операторы d и δ, действующие в $\mathbf{R}^{n-1}$. Показывается, что $\psi^{k-2} = \delta'\varphi_2^{k-1} - \hat{\gamma}_2^{k-2}$ удовлетворяет уравнению

$$(-\Delta + \lambda^2 w)\psi^{k-2} = 0. \tag{12}$$

Поэтому система (9) эквивалентна первому уравнению в (9), краевому условию

$$\psi^{k-2} = 0 \text{ на } L \tag{13}$$

и условиям ортогональности ψ^{k-2} всем нетривиальным решениям задачи (12), (13), если такие имеются.

Аналогично предыдущему приходим к следующему результату.

Теорема 4. *Если задача* (3), (9), (13) *в области* D *и задача* (10), (11) *в области* Ω *удовлетворяют условию Шапиро-Лопатинского, то однородная задача* II *имеет конечное число линейно независимых решений. Существуют интегродифференциальные условия согласования на* γ^{k+1}, ϑ_1 *и* ϑ_2, *необходимые и достаточные для разрешимости задачи* II, *при выполнении которых ее любое решение принадлежит классу* $C^{2,\alpha}(\bar{D})$.

Можно показать, что операторы $\beta_1 = t$, $\beta_2 = t$ удовлетворяют условиям этой теоремы.

В случае $n=3$, $k=1$ в работе ([10]) получены более конкретные результаты.

Леммы 3 и 4 работы ([4]) позволяют получить некоторые результаты для систем (1_k), $n \neq 2k+1$, при более общих чем (2) краевых условиях

$$\beta_3\omega^k + \beta_4\omega^{n-k-1} = \vartheta_3 \text{ на } L, \tag{14}$$

а также рассматривать краевые задачи для системы (1):

$$\beta\omega|_L = \vartheta; \tag{15}$$

здесь β_3, β_4 и β — заданные дифференциальные операторы, ϑ_3 и ϑ — заданные формы класса $C^{2,\alpha}(L)$.

Аналогично предыдущему получается

Теорема 5. *Если задача* (14) *для системы* (1_k), (5) *удовлетворяет условию Шапиро-Лопатинского, то однородная задача* (1_k), (14) *имеет конечное число линейно независимых решений. Неоднородная задача* (1_k), (14) *разрешима тогда и только тогда, когда* γ^{k+1}, γ^{n-k} *и* ϑ_3 *удовлетворяют некоторым вполне определенным интегродифференциальным уравнениям. При выполнении этих условий решение задачи* (1_k), (14) *принадлежит классу* $C^{2,\alpha}(\bar{D})$.

Аналогичная теорема имеет место для задачи (1), (15).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступила
25 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ж. де Рам,* Дифференциальные многообразия, ИЛ, 1956. [2] *Л. Шварц,* Комплексные многообразия, Эллиптические уравнения, М., 1964. [3] *Б. Р. Вайнберг, В. В. Грушин,* Матем. сборн., ч. I 72 (114), № 4 (1967); ч. II 73 (115), № 1 (1967). [4] *Р. С. Сакс,* ДАН, т. 212, № 5 (1973). [5] *S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg,* Commun. pure and appl., v. 17, 35 (1964). [6] *Л. Р. Волевич,* Матем. сборн., т. 68 (110), № 3 (1965). [7] *А. В. Бицадзе,* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966. [8] *В. А. Солонников,* Записи научн. семинаров ленингр. матем. инст., т. 21, № 5 (1971). [9] *Е. С. Зуховицкая,* Матем. сборн., 83 (130), 4 (8) (1972). [10] *Е. С. Зуховицкая,* ДАН, т. 201, № 3 (1971). [11] *Р. С. Сакс,* ДАН, т. 199, № 5 (1971). [12] *Р. С. Сакс,* Дифференц. уравнения, т. 8, № 1 (1972). [13] *И. С. Гудович, С. Г. Крейн,* Матем. сборн., т. 84 (126), № 4 (1971).