Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 6

УДК 513.88:513.83 *МАТЕМАТИКА*

Ю. Л. ГЕВОРКЯН, В. И. ГУРАРИЙ

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПОДПРОСТРАНСТВАХ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 1 IV 1974)

1. Квазинормированная последовательность $\{x_k\}_1^\infty$ в банаховом пространстве E ([1]) называется p-бесселевой ($p\geqslant 1$), если существует такая константа $B>0$, зависящая от $\{x_k\}_1^\infty$, что для любого конечного разложения $x=\sum\limits_1^n \alpha_k x_k$ имеет место неравенство

$$\|x\|\geqslant B\left(\sum_1^n |\alpha_k|^p\right)^{1/p}.$$

При этом система называется чистой p-бесселевой, если она нормирована и $B=1$.

Теорема 1. *Если в n-мерном банаховом пространстве B^n есть чистая p-бесселева система $\{e_i\}_1^n$, $1\leqslant p<2$, то $\lambda(B^n)\geqslant cn^\alpha$, где $\alpha=\alpha(p)>0$.*

Определение абсолютной проекционной константы $\lambda(B^n)$ см. в ([2]).

Теорема 2. *Для любого метрического компакта K в пространстве $C(K)$ нет квазинормированного p-бесселева базиса при $1\leqslant p<2$.*

Замечание. Если бы эту теорему удалось доказать и для $p=2$, то отсюда немедленно вытекал бы известный результат А. М. Олевского ([3]) об отсутствии в $C[0, 1]$ ортонормированного в смысле L_2 базиса, состоящего из ограниченных в совокупности функций.

Пусть E — нормированное пространство, $\{e_k\}_1^\infty$ — полная минимальная система в E, $\{f_k\}_1^\infty\subset E^*$ — сопряженная система к $\{e_k\}_1^\infty$. Сопоставим каждому элементу x ряд $\sum\limits_1^\infty \alpha_k e_k$, где $\alpha_k=f_k(x)$.

Элемент x называется карлемановым (усиленно карлемановым), если ряд $\sum\limits_1^\infty |\alpha_k(x)|^p$ расходится для всех $1\leqslant p<2$ (для всех $p\geqslant 1$).

Система $\{e_k\}_1^\infty$ называется карлемановой (усиленно карлемановой), если существует карлемановый (усиленно карлемановый) элемент x относительно системы.

Очевидно, усиленно карлеманова система является карлемановой. Как показал А. М. Олевский ([4]), любая ортонормированная система в $C[0, 1]$ является карлемановой.

Теорема 3. *Нормированный базис в $C(K)$ является карлемановой системой.*

Определим класс $\mathfrak{R}$ банаховых пространств, считая что $E\in\mathfrak{R}$, если $\lambda(P)=\lambda(P, E)$ для любого конечномерного подпространства $P\subset E$.

Теоремы 2 и 3 верны для любого сепарабельного пространства $E\in\mathfrak{R}$.

Теорема 4. *Пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — полная минимальная квазинормированная система в $C(K)$, P_n — линейная оболочка первых n ее элементов, $n=1, 2, \ldots$ Если для любого $\alpha>0$ выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\alpha}\lambda(P_n)=0$, то система $\{e_k\}_1^\infty$ является карлемановой в $C(K)$.*

Для иллюстрации отметим, что тригонометрическая система карлеманова в $C[0, 1]$, так как $\lambda(P_n)=O(\ln n)$.

Теорема 5. *Минимальная система $\{e_k\}_1^\infty$ в банаховом пространстве E, не являющаяся равномерно минимальной, усиленно карлеманова в E.*

2. Приведем две теоремы, оценивающие дистанцию Банаха — Мазура банахова пространства B^n с чистым p-бесселевым базисом от пространств C^n и l_2^n (соответствующие определения (см. в ([2])).

Теорема 6. *Для положительной последовательности $\{t_m\}_1^\infty\to 0$ существует положительная последовательность $\{\eta_n\}_1^\infty\to 0$, обладающая следующим свойством: для произвольного банахова пространства B^n с базисом $\{e_k\}_1^n$ таким, что $\|\sum_1^m e_k\|\leqslant t_m\cdot m$, $m=1, 2, 3, \ldots, n$, и любого разложения $x=\sum_1^n \alpha_k e_k$ с положительными монотонно убывающими коэффициентами $\{\alpha_k\}_1^n$, имеет место неравенство*

$$\|x\|\leqslant\eta_n \sqrt{n}\left(\sum_1 |\alpha_k|^2\right)^{1/2}.$$

С помощью теоремы 6 доказывается следующая

Теорема 7. *Для данной положительной последовательности $\{t_n\}_1^\infty\to 0$ найдется такая положительная последовательность $\{\eta_n\}_1^\infty\to 0$. зависящая от $\{t_n\}_1^\infty$, что для всякого n-мерного банахова пространства B^n с чистым бесселевым базисом $\{e_k\}_1^n$, удовлетворяющим условию*

$$\left\|\sum_1^m \varepsilon_{k_i} e_{k_i}\right\|\leqslant t_m m, \quad m=1, 2, 3, \ldots, n; \quad \varepsilon_{k_i}=\pm 1,$$

имеют место неравенства

$$d(B^n, l_2^n)\leqslant\eta_n\sqrt{n}, \quad \lambda(B^n)\geqslant\frac{1}{\eta_n}, \quad d(B^n, C^n)\leqslant\eta_n n.$$

Пусть $\mathfrak{M}_n$ — компакт Минковского ([5]), $n=1, 2, 3, \ldots$, $\mathfrak{M}=\bigcup_1^\infty\mathfrak{M}_n$. Назовем функционал V, определенный на $\mathfrak{M}$, объемным, если он удовлетворяет условиям:

1) $V(B^n)\geqslant V(C^n)$, $V(C^{n+m})=V(C^n)\cdot V(C^m)$.

2) Для каждого $0<\gamma\leqslant 1$ существует такое $A(\gamma)>0$, что если $B=B_1\dotplus B_2$, $(\widehat{B_1, B_2})\geqslant\gamma$, то $V(B)\geqslant A^n(\gamma)V(B_1)\cdot V(B_2)$ (определение наклона $(\widehat{B_1, B_2})$ см. в ([5])).

3) Если $d(B_1, B_2)\leqslant\alpha$, то $V(B_1)\leqslant\alpha^n V(B_2)$.

Значение $V(B^n)$ будем называть объемом единичного шара в B^n, или проще, объемом B^n.

Примерами объемных функционалов может служить $[\lambda(B)]^n$, где $n=\dim B$, а также функция $V(B)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^n N_\varepsilon^R(s)$ (по поводу обозначений и существования предела см. ([7])).

Теорема 8. *Для любого n-мерного банахова пространства B^n существует вещественная положительная функция $f(a)$ такая, что если $\lambda(B^n)\leqslant a$, то*

$$V(B^n)\leqslant f(a)V(C^n).$$

3. В этом параграфе приводятся некоторые свойства банаховых пространств, связанные с расположением его подпространств.

Теорема 9. *Сепарабельное банахово пространство E почти универсального расположения относительно класса $\mathfrak{N}$ является универсальным относительно класса $\mathfrak{H}$.*

Определения классов $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ и пространства почти универсального расположения относительно заданного класса см. в ([8]).

Введем следующие

Определения. 1) Две пары нормированных пространств $\{P_1 \subset R_1\}$ и $\{P_2 \subset R_2\}$ назовем δ-близкими, если

$$d(\{P_1 \subset R_1\},\ \{P_2 \subset R_2\}) = \inf_T \|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 1+\delta,$$

где T пробегает изоморфизмы R_1 и R_2, отображающие P_1 на P_2.

2) Пусть $f = f(P, E)$ — неотрицательная функция двух переменных, определенная на множестве пар нормированных пространств $\{P, E\}$, где P — подпространство в E. Функционал f назовем относительным диспозиционным функционалом, если он непрерывен в метрике Банаха — Мазура в смысле следующего определения.

3) Функционал f назовем непрерывным в метрике Банаха — Мазура, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух δ-близких пар $\{P_1 \subset R_1\}$ и $\{P_2 \subset R_2\}$ выполнено условие

$$|f(P_1, R_1) - f(P_2, R_2)| < \varepsilon.$$

4) Относительный диспозиционный функционал назовем финитно непрерывным, если для любого банахова пространства E и любого конечномерного подпространства P найдется расширяющаяся цепочка конечномерных подпространств

$$P \subset P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_n \subset \ldots,$$

для которой имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(P, P_n) = f(P, E).$$

5) Относительный диспозиционный функционал назовем возрастающим, если для произвольных $P_1 \subset P_2 \subset P_3$ имеет место неравенство

$$f(P_1, P_2) \leqslant f(P_1, P_3).$$

6) Абсолютным диспозиционным функционалом f банахова пространства P назовем величину

$$f(P) = \operatorname{Sup}_{\tilde{P} \subset E} f(\tilde{P}, E),$$

где $\tilde{P}$ изометрично P.

Теорема 10. *Существует универсальное сепарабельное банахово пространство U такое, что для любого его конечномерного подпространства P и любого возрастающего финитно непрерывного функционала f имеет место равенство*

$$f(P) = f(P, U).$$

В связи с недавно полученным П. Энфло ([9]) отрицательным решением проблемы базиса становится актуальной проблематика доказательства существования или несуществования базиса в данном сепарабельном банаховом пространстве. Теорема, которая будет приведена ниже, выделяет некоторый класс пространств, не имеющих базиса.

Определим проекционную функцию банахова пространства E на интервале $1 \leqslant \lambda < \infty$:

$$f_E(\lambda) = \inf_{\dim P < \infty,\ \lambda(P) \geqslant \lambda} \lambda(P, E).$$

Функция $f_E(\lambda)$ не убывает на интервале $(1, \infty)$, $f(1)=1$ и справедливо неравенство

$$1 \leqslant f_E(\lambda) \leqslant \lambda + 1.$$

В зависимости от роста проекционной функции определим:

1) $\mathfrak{A}$ — класс банаховых пространств, для которых проекционная функция ограничена.

2) $\mathfrak{B}$ — класс банаховых пространств, для которых проекционная функция имеет порядок роста λ: $f_E(\lambda) \asymp \lambda$.

Теорема 11. *Всякое пространство, не принадлежащее* $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, *не имеет базиса.*

Теорема 12. *Пусть K — метрический компакт, тогда* $f_{C(K)}(\lambda) = \lambda$.

Харьковский политехнический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
20 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. И. Гурарий,* Мат. исследования, Кишинев, VI : I, № 19, 162 (1971). [2] *В. И. Гурарий, М. И. Кадец, В. И. Мацаев,* Мат. сборн., т. 70, № 112, 481 (1966). [3] *А. М. Олевский,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, № 2, 387 (1966). [4] *А. М. Олевский,* Матем. сборн., т. 71, № 113, 297 (1966). [5] *М. И. Кадец, М. Г. Снобар,* Матем. заметки, т. 10, в. 4, 453 (1971). [6] *В. И. Гурарий,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, 289 (1966). [7] *А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров,* УМН, т. 14, в. 1, 3 (1959). [8] *В. И. Гурарий,* Сибирск. матем. журн., т. 7, в. 5, 1002 (1966). [9] *P. Enflo,* Acta Math., v. 130, № 3–4, 309 (1973).