

Ф. И. ГЕЧЕ

АБСТРАКТНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 11 II 1974)

Большую роль в развитии теории пространств аналитических функций⁽¹⁾ сыграли работы А. И. Маркушевича⁽²⁾, Тёплица, Кёте и др. (см. ^(3, 4)). В работах последних авторов подробно изучаются топологические свойства определенных пространств последовательностей, или так называемых координатных пространств. Более конкретные координатные пространства исследуются в работах М. Г. Хапланова⁽⁵⁾, С. Д. Окуня⁽⁶⁾, Ю. Ф. Коробейника⁽⁷⁾, Ролевича⁽⁸⁾ и др. В данной статье с помощью понятия направленной характеристики кратной последовательности определяется довольно широкий класс координатных пространств (точнее, пространств кратных последовательностей), но все же принадлежащих хорошо изученным классам линейных топологических пространств. Они являются естественным обобщением абстрактных аналитических пространств, исследуемых в работах М. Г. Хапланова.

Кроме общепринятых обозначений $\mathbf{R}, \mathbf{R}_+, \bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}_+, \mathbf{R}^n, \mathbf{C}, \mathbf{C}^n, \mathbf{Z}^n$ будем пользоваться следующими сокращениями: $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$, $\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, $\pi(x) = x/\|x\|$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $\Sigma = \{x \in \mathbf{R}^n: \|x\| = 1\}$, K — произвольное фиксированное подмножество \mathbf{Z}^n . Семейство $\{a_k, k \in K\}$ комплексных чисел a_k будем называть точкой и обозначать буквой A . Аналогично положим $A' = \{a_k', k \in K\}$, $B = \{b_k, k \in K\}$. Далее, обозначим $K_A = \{k \in K: a_k \neq 0\}$, $\Sigma_K = \{\alpha \in \Sigma: \alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi(k^{(m)}), k^{(m)} \in K, \lim_{m \rightarrow \infty} \|k^{(m)}\| = \infty\}$.

Удобно также принять следующее соглашение: $(-\infty)a = -\infty$, $a \in \bar{\mathbf{R}}$; $(+\infty)b = +\infty$, $b \in \mathbf{R}_+$; $1/0 = +\infty$, $1/+\infty = 0$.

Определение 1. Характеристикой будем называть произвольное семейство $\Phi = \{\Phi_k: \mathbf{R}_+ \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+, k \in K\}$ неубывающих функций Φ_k с условием $\mathbf{R}_+ \subset \Phi_k(\mathbf{R}_+)$, $k \in K$. Направленной Φ -характеристикой (н. Φ -х.) точки A называется функция $\chi_{\Phi}^A: \Sigma_K \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+ \cup \{-\infty\}$, которая определяется соотношениями

$$\chi_{\Phi}^A(\alpha) = \overline{\lim_{\pi(k) \rightarrow \alpha} \Phi_k(|a_k|)} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{\substack{\|k\| \rightarrow \infty \\ \pi(k) \rightarrow \alpha, k \in K}} \Phi_k(|a_k|)},$$

если $\alpha \in \Sigma_{K_A}$, и $\chi_{\Phi}^A(\alpha) = -\infty$, если $\alpha \in \Sigma_k \setminus \Sigma_{K_A}$.

Полунепрерывной сверху функцией в широком смысле будем называть функцию, которая полунепрерывна сверху в смысле⁽⁹⁾ (стр. 17).

Общий вид н. Φ -х. определяется следующей теоремой.

Теорема 1. Функция $\varphi: \Sigma_K \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+ \cup \{-\infty\}$ является н. Φ -х. некоторой точки A тогда и только тогда, когда функция φ полунепрерывна сверху в широком смысле.

Определение 2. Характеристика $\Phi^* = \{\Phi_k^*, k \in K\}$ называется дуальной к характеристике $\Phi = \{\Phi_k, k \in K\}$, если выполняются следующие условия:

1) $\Phi_k^*(t) = [\Phi_k(1/t)]^{-1}$, если $t \in \hat{\mathbf{R}}, \Phi_k^*(0) = 0, k \in K$;

2) для любых точек A и B , удовлетворяющих неравенству $\chi_{\Phi^A} \chi_{\Phi^B} < 1$, справедливо соотношение $\sum_{k \in K} |a_k b_k| < \infty$;

3) каковы бы ни были $\alpha_0 \in \Sigma_K$ и точка B с условием $0 \leq \chi_{\Phi^B}(\alpha_0) \leq \infty$ (точка A с условием $0 \leq \chi_{\Phi^A}(\alpha_0) \leq \infty$), существует точка A (точка B) такая, что $\sum_{k \in K} |a_k b_k| = \infty$, $\chi_{\Phi^A}(\alpha_0) = [\chi_{\Phi^B}(\alpha_0)]^{-1}$, $\chi_{\Phi^A}(\alpha) \chi_{\Phi^B}(\alpha) < 1$, $\alpha \in \Sigma_K \setminus \{\alpha_0\}$.

Теорема 2. Для того чтобы характеристика Φ обладала дуальной характеристикой Φ^* , достаточно, чтобы характеристика Φ обладала следующим свойством: $\chi_{\Phi^A} = \chi_{\Phi^{A'}}$ для любой пары точек A, A' , удовлетворяющих условию $a_k' = (1 + \delta_k)^{\|k\|} a_k$, $k \in K$, $\delta_k \rightarrow 0$ при $\|k\| \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Пусть характеристика Φ такова, что $\Phi_k(t) = (td_k)^{1/q_k}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $k \in K$. Для существования дуальной характеристики Φ^* достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\|k\| \rightarrow \infty, k \in K} \frac{\ln \|k\|}{q_k} = 0.$$

Определение 3. Характеристика Φ называется однородной, если для любой точки A и для любого положительного числа s имеет место равенство $\chi_{\Phi^A} = \chi_{\Phi^{sA}}$, где sA — произведение s на A .

Лемма 1. Если характеристика Φ однородна, то $\chi_{\Phi^{A+B}} \leq \max\{\chi_{\Phi^A}, \chi_{\Phi^B}\}$.

Лемма 2. Пусть характеристика Φ обладает дуальной характеристикой Φ^* .

а) Характеристика Φ однородна тогда и только тогда, когда однородна Φ^* .

б) Дуальная характеристика к характеристике Φ^* совпадает с Φ .

Фиксируем в дальнейшем произвольную однородную характеристику Φ , имеющую дуальную характеристику Φ^* .

Определение 4. Пусть $\varphi: \Sigma_K \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ — произвольная функция. Абстрактным аналитическим (а.а.) пространством называется векторное пространство над полем \mathbb{C} одного из следующих видов: $\mathfrak{A}_{\Phi}(\varphi) = \{A: \chi_{\Phi^A} \leq \varphi\}$, $\bar{\mathfrak{A}}_{\Phi}(\varphi) = \{A: \chi_{\Phi^A} < \varphi\}$, $\mathfrak{A}_{\Phi^*}(\varphi) = \{A: \chi_{\Phi^*A} \leq \varphi\}$, $\bar{\mathfrak{A}}_{\Phi^*}(\varphi) = \{A: \chi_{\Phi^*A} < \varphi\}$ (векторная структура естественная).

Понятно, что пространства $\mathfrak{A}_{\Phi}(\varphi)$ и $\mathfrak{A}_{\Phi^*}(\varphi)$ (соответственно $\bar{\mathfrak{A}}_{\Phi}(\varphi)$ и $\bar{\mathfrak{A}}_{\Phi^*}(\varphi)$) однотипны, различны лишь характеристики, с помощью которых они определяются. Буквой \mathfrak{A} будем обозначать а.а. пространство произвольного типа.

Отожествляя голоморфную в n -круговой области функцию с семейством ее тейлоровских или лорановских коэффициентов, можем привести много примеров пространств голоморфных и целых функций, которые будут а.а. пространствами. Такими будут, например, пространство всех многочленов, пространство всех голоморфных функций в точке $0 \in \mathbb{C}^n$, пространство всех целых функций, пространство всех голоморфных функций в полной (или относительно полной) логарифмически выпуклой n -круговой области G (или \bar{G} при некоторых ограничениях), различные пространства целых функций с определенными ограничениями на порядок и тип роста или на гиперповерхности сопряженных порядков и типов. Если характеристика Φ определена так, как в теореме 3, то пространства $\mathfrak{A}_{\Phi}(\varphi)$, $\bar{\mathfrak{A}}_{\Phi}(\varphi)$ охватывают (при $\varphi(\alpha) = c = \text{const}$) большинство примеров известных степенных пространств Кёте (^{7, 8, 10}).

Для а.а. пространства \mathfrak{A} , как и для произвольного координатного пространства (³), определяется дуальное пространство \mathfrak{A}^x . Это векторное пространство тех и только тех точек B , для которых сходится ряд $\sum_{k \in K} |a_k b_k|$ при любом $A \in \mathfrak{A}$.

Пространство \mathfrak{A} называется совершенным, если $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^x)^x$.

Теорема 4. Дуальными пространствами к пространствам $\mathfrak{A}_\Phi(\varphi)$, $\overline{\mathfrak{A}}_\Phi(\varphi)$, $\mathfrak{A}_\Phi \cdot (\varphi)$, $\overline{\mathfrak{A}}_\Phi \cdot (\varphi)$ являются соответственно пространства $\overline{\mathfrak{A}}_\Phi \cdot (1/\varphi)$, $\mathfrak{A}_\Phi \cdot (1/\varphi)$, $\overline{\mathfrak{A}}_\Phi(1/\varphi)$, $\mathfrak{A}_\Phi(1/\varphi)$.

Следствие. Любое а.а. пространство совершенно.

На множестве $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}^x$ определяется билинейная форма $\langle A, B \rangle$ равенством $\langle A, B \rangle = \sum_{k \in K} a_k b_k$. Билинейная форма $\langle A, B \rangle$ удовлетворяет условиям

отделимости:

$$1) (\forall A \in \mathfrak{A}, A \neq 0) (\exists B \in \mathfrak{A}^x) \{ \langle A, B \rangle \neq 0 \};$$

2) $(\forall B \in \mathfrak{A}^x, B \neq 0) (\exists A \in \mathfrak{A}) \{ \langle A, B \rangle = 0 \}$. Следовательно, пространства \mathfrak{A} и \mathfrak{A}^x образуют дуальную пару $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$ или же находятся в двойственности. В а.а. пространстве \mathfrak{A} можно ввести различные топологии, при которых \mathfrak{A}^x будет сопряженным пространством. О таких топологиях говорят, что они согласуются с двойственностью $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$. Слабейшая из этих топологий обозначается через $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$ и определяется базисом замкнутых окрестностей нуля $\{A: |\langle A, B_j \rangle| \leq 1, j \in J\}$, где $\{B_j, j \in J\}$ — всевозможные конечные подмножества \mathfrak{A}^x .

Скажем, что множество $G \subset \mathfrak{A}$ мажорируется одной точкой пространства \mathfrak{A} , если $(\exists A' \in \mathfrak{A}) (\forall A \in G) \{ |a_k| \leq a'_k, k \in K \}$.

Теорема 5. Множество точек произвольного а.а. пространства \mathfrak{A} слабо ограничено тогда и только тогда, когда оно мажорируется одной точкой этого пространства.

Наряду со слабой топологией $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$ в пространстве \mathfrak{A} рассмотрим нормальную топологию $\nu(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$ и сильную топологию $\beta(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$. Они определяются соответственно семействами преднорм $\{p_B: B \in \mathfrak{A}^x\}$ и $\{q_Q: Q \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A}^x)\}$, где

$$p_B(A) = \sum_{k \in K} |a_k b_k|, \quad q_Q(A) = \sup_{B \in Q} |\langle A, B \rangle|,$$

$\mathfrak{B}(\mathfrak{A}^x)$ — множество всех слабо ограниченных подмножеств пространства \mathfrak{A}^x .

Все три топологии $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$, $\nu(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$ и $\beta(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$ отделимы и локально-выпуклы, причем первая — слабейшая, а третья — сильнейшая среди таких топологий. Пространство \mathfrak{A} , снабженное топологией $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$, обозначается через (\mathfrak{A}, σ) . Аналогично определяются топологические пространства (\mathfrak{A}, ν) и (\mathfrak{A}, β) .

Теорема 6. Для того чтобы последовательность точек а.а. пространства была слабо сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была слабо ограниченной и имела покоординатные пределы.

Теорема 7. В а.а. пространствах слабо сходящиеся последовательности сильно сходятся, и наоборот.

Теорема 8. В пространстве (\mathfrak{A}, σ) подмножество компактно тогда и только, когда оно ограничено и замкнуто.

Теорема 9. В пространстве (\mathfrak{A}, σ) ограниченное множество является замкнутым тогда и только тогда, когда это множество содержит предел любой слабо сходящейся последовательности своих точек.

Теорема 10. Подмножество пространства (\mathfrak{A}, σ) ограничено (компактно) тогда и только тогда, когда это множество ограничено (компактно) в пространстве (\mathfrak{A}, β) .

Теорема 11. Нормальная топология $\nu(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$ в пространстве \mathfrak{A} совпадает с сильной топологией $\beta(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$ и является сильнейшей топологией, согласующейся с двойственностью $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^x)$.

Теорема 12. Пространство (\mathfrak{A}, β) является монтелиевским пространством.

Следующее утверждение является частным случаем одной теоремы из (3).

Теорема 13. Пространства (\mathfrak{A}, σ) и (\mathfrak{A}, β) являются полными топологическими пространствами.

Теорема 14. Пусть $\varphi: \Sigma_{\kappa} \rightarrow \mathbf{R}_+$ — произвольная функция. Пространство $(\mathfrak{A}_{\varphi}(\varphi), \beta)$ метризуемо тогда и только тогда, когда функция φ полунепрерывна сверху.

Из теорем 12—14 вытекает

Теорема 15. Если функция $\varphi: \Sigma_{\kappa} \rightarrow \mathbf{R}_+$ полунепрерывна сверху, то пространство $(\mathfrak{A}_{\varphi}(\varphi), \beta)$ является монтелевским пространством Фреше.

Теорема 16. Пространство $\mathfrak{A}_{\varphi}(\varphi)$, снабженное сильной топологией $\beta(\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{A}^x}) = \beta(\mathfrak{A}_{\varphi}(\varphi), \mathfrak{A}_{\varphi} \cdot (1/\varphi))$, является пространством типа (DF) ⁽¹¹⁾ тогда и только тогда, когда функция $\varphi: \Sigma_{\kappa} \rightarrow \overline{\mathbf{R}_+} \setminus \{0\}$ полунепрерывна снизу.

Теорема 17. Если функция $\varphi: \Sigma_{\kappa} \rightarrow \overline{\mathbf{R}_+} \setminus \{0\}$ полунепрерывна снизу, то пространство $(\overline{\mathfrak{A}_{\varphi}(\varphi)}, \beta(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{A}^x}))$ является индуктивным пределом последовательности банаховских пространств.

Ужгородский государственный
университет

Поступило
30 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. П. Хавин, Математический анализ, 1964, Итоги науки, М., 76 (1966). ² А. И. Маркушевич, Матем. сборн., т. 17(59), № 2, 211 (1945). ³ G. Köthe, Math. Nachricht., В. 4, 70 (1950—1951). ⁴ G. Köthe, Topologische lineare Räume, I, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960. ⁵ М. Г. Хаплавов, ДАН, т. 79, № 6, 929 (1951). ⁶ С. Д. Окунь, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст., т. 137, 151 (1964). ⁷ Ю. Ф. Коробейник, Сборн. Матем. анализ и его приложения, Ростов, 1969, стр. 116. ⁸ S. Rolewicz, Stud. Math., v. 21, 135 (1961). ⁹ В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. ¹⁰ В. В. Моржаков, Литовск. матем. сборн., т. 11, № 4, 841 (1971). ¹¹ А. Грогендик, Сборн. пер. Математика, т. 2, № 3, 81 (1958).