Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 6

УДК 532.54 : 528 : 2

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Л. ДАНИЛОВ

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ И ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 22 XII 1973)

1. Задачи теории фигур равновесия вращающейся жидкости и теории фигуры Земли — это обратные задачи теории потенциала. Искомой является стационарная (в связанной с телом системе координат) поверхность, на которой выполняется зависящее от ее формы условие ([1–4], [11]).

Предлагается постановка задач этого класса как задач Коши для функциональных уравнений специального типа. Основной смысл динамического подхода — в указании путей построения регулярных алгоритмов решения задач в нелинейной постановке.

2. Рассмотрим следующую задачу. Все пространство занято недеформируемой пористой средой, имеющей проницаемость $k=\text{const}$ и пренебрежимо малый объем «скелета», так что можно считать пористость $m=1$. Область D_1 конечного объема и диаметра заполнена несжимаемой жидкостью с динамической вязкостью μ и плотностью ρ_1; внешняя к D_1 область D_2 заполнена другой несжимаемой жидкостью с той же вязкостью и пренебрежимо малой плотностью ($\rho_2=0$). Пористая среда вращается с угловой скоростью $\omega=\text{const}$ около оси Oz, проходящей через центр O масс жидкости в D_1. Течение в неинерциальной системе отсчета $Oxyz$, вращающейся вместе с пористой средой, подчиняется линейному закону фильтрации ($i=1$ при $M\in D_1$, $i=2$ при $M\in D_2$):

$$\mathbf{v}_{\phi i}=-c(\nabla p_i-\rho_i\mathbf{F}_i), \tag{1}$$

где $\mathbf{v}_{\phi i}$ — вектор скорости фильтрации i-й жидкости, p_i — гидродинамическое давление в D_i, $c=k/\mu$ — коэффициент подвижности в D_1 и D_2, $\mathbf{F}_i$ — массовая сила, действующая на единицу массы жидкости ([5]).

Вследствие малости скоростей фильтрации из уравнений Навье — Стокса следует, что массовые силы имеют потенциал U:

$$\mathbf{F}_i=\nabla U, \tag{2}$$

где, с учетом свойств жидкостей и пористой среды, U равен ([3]):

$$U=U_\varkappa+U_\omega, \quad U_\varkappa=\varkappa\int\frac{\rho_1(\mathbf{R}')}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}d\tau', \qquad U_\omega={}^1/_2|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}|^2={}^1/_2\omega^2\mathfrak{R}^2,$$
$$|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|=r=((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{1/2},\quad d\tau'=dx'dy'dz', \tag{3}$$
$$\mathfrak{R}^2=x^2+y^2;$$

здесь $\varkappa$ — гравитационная постоянная; $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$ — радиусы-векторы точек $\mathbf{M}(x,y,z)$ и $\mathbf{M}'(x',y',z')$ соответственно.

Поскольку средняя скорость $\langle\mathbf{v}_i\rangle=\mathbf{v}_{\phi i}/m$, то $\langle\mathbf{v}_i\rangle=\mathbf{v}_{\phi i}$ при $m=1$. Стягивая площадь сечения к точке, получаем $\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_{\phi i}$, после чего уравнениям (1) придадим вид

$$\mathbf{v}_i=-c\nabla(p_i-\rho_i U). \tag{4}$$

Вследствие несжимаемости жидкостей $\nabla\mathbf{v}_i=0$ и потому из (4) находим

$$\nabla^2H_i=0,\quad H_i=p_i-\rho_i U. \tag{5}$$

Таким образом, функции H_i являются гармоническими в D_i.

Пусть на поверхности раздела жидкостей S существует скачок давлений

$$p_1^+ - p_2^- = f(s); \tag{6}$$

здесь и далее верхние индексы + и — означают предельные значения при стремлении к $s \in S$ соответственно изнутри и снаружи.

Полагая взаимное вытеснение жидкостей полным («поршневым»), выведем уравнение движения поверхности S под действием массовых сил (2) и скачка давлений (6). Обозначая значение U на S через U_S, из (5) и (6) получаем

$$H_1^+ - H_2^- = p_1^+ - \rho_1^+ U_S - p_2^- = f(s) - \rho_1^+ U_S. \tag{7}$$

При переходе через S непрерывна v_n. Из (4) и (5) находим

$$v_n = -c\,\partial H_1^+/\partial n = -c\,\partial H_2^-/\partial n \tag{8}$$

(n — внешняя к S нормаль в точке s). Из (7) и (8) следует, что функции H_i естественно представить потенциалом двойного слоя W:

$$H = W = \int_S \nu(s') \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right) ds', \tag{9}$$

где ν — плотность, непрерывная по S, n' — внешняя к S нормаль в s'. Если S — поверхность Ляпунова, то ([6], [7])

$$H^\pm = W^\pm = W_S \mp 2\pi\nu, \qquad \partial H^+/\partial n = \partial H^-/\partial n = \partial W_S/\partial n. \tag{10}$$

Подставляя (10_1) и (10_2) в (7), определяем ν:

$$\nu = {}^1/_4\pi^{-1}(\rho_1^+ U_S - f). \tag{11}$$

Из (8), (9), (10_3) и (11) следует

$$v_n = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\int_S (\rho_1^+ U_S - f)\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right) ds'. \tag{12}$$

Отметим, что: 1) у жидких фигур равновесия из соображений устойчивости всегда $\rho_1^+ = \rho_{1\,\min} = \mathrm{const}$; 2) у неоднородного неравновесного вращающегося тела U не изменится, если на S нанести бесконечно тонкий слой с постоянной объемной плотностью ρ_{1S}. Поэтому уравнению динамики поверхности (12), учитывая также теорему Гаусса о потенциале двойного слоя с постоянной плотностью ([7]), можно придать вид

$$v_n = -\frac{t_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\int_S \Lambda \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right) ds', \qquad \Lambda = U_S - \frac{1}{\rho_{1S}} f + B, \tag{13}$$

где $t_0 = c\rho_{1S}$ и B постоянные.

Из (13) вытекает, что $v_n = 0$ тогда и только тогда, когда $\Lambda = \mathrm{const}$.

Введем неявное уравнение S и выразим из него v_n:

$$F(x, y, z, t) = 0, \qquad v_n = -(\partial F/\partial t)/(\partial F/\partial n). \tag{14}$$

С помощью (14_2) уравнение (13_1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial F}{\partial t} \Big/ \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{t_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\int_S \Lambda \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right) ds'. \tag{15}$$

Для него может быть корректно поставлена задача Коши: определить функцию F (14_1), удовлетворяющую уравнению (15) и начальному условию

$$F(x, y, z, 0) = F_0(x, y, z) = 0. \tag{16}$$

Поскольку, как показано ниже, представляет интерес лишь стационарная асимптотика $\lim\limits_{t\to\infty} F(x, y, z, t)=0$, т. е. S, на которой $v_n=0$, то множитель t_0 (размерности t) можно выбирать произвольно и, вводя $\tau=t_0t$, сократить вообще.

3. Перейдем к постановке конкретных задач Коши.

А. Задача о фигуре равновесия однородной вращающейся жидкости ($\rho_1=\text{const}$). Условие на искомой S имеет вид ([1-3]) $U_S=C$, где U_S дано выражением (3). Так как постоянная C наперед не известна, представим ее как

$$C=\langle U_S\rangle=\frac{1}{S}\int\limits_S U_S\,ds. \tag{17}$$

Тогда условию на S можно придать форму

$$\Lambda=U_S-\langle U_S\rangle=0. \tag{18}$$

Сопоставляя (13) с (18), имеем $f=0$, $B=-\langle U_S\rangle$. Выберем в качестве начальной известную поверхность S_0, ограничивающую объем D_1, равный объему искомой фигуры. В общем случае, очевидно $\Lambda_{S_0}\neq\text{const}\neq 0$ и, следовательно, $v_n\neq 0$. Формулируем задачу: найти стационарную асимптотику при $t\to\infty$ поверхности S, нормальная скорость v_n которой удовлетворяет уравнению (13_1) и начальное положение S_0 которой известно. Плотность Λ дана (18). Формулировка задачи Коши (15), (16), (18) очевидна.

К аналогичной задаче Коши нетрудно свести задачу о слоистой (равновесной) Земле (причем искомыми в ней будут как внешняя поверхность, так и поверхности раздела слоев различной плотности), а также задачу о фигуре равновесия вращающейся жидкости при действии поверхностного натяжения ([2]).

В. Задача о фигуре геоида (обратная проблема Стокса) ставится так: найти внешнюю поверхность S уровня потенциала U силы тяжести, ограничивающую тело, если известны его масса M, угловая скорость ω (=const) и распределение на S (в функции геоцентрических координат) силы тяжести $g=-\partial U/\partial n$. Учтем известное выражение для U на поверхности S уровня ([8])

$$U_S=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\frac{g\,ds'}{r}+\frac{\omega^2}{2\pi}\int\limits_{D_1}\frac{d\tau'}{r}+\frac{\omega^2}{2}\Re_S{}^2 \tag{19}$$

и соотношение Пуанкаре для объема тела

$$D_1=2\pi\varkappa\omega^{-2}M-(2\omega^2)^{-1}\int\limits_S g\,ds. \tag{20}$$

Условие на искомой поверхности S геоида $U_S{}^S=C$, где C — неизвестная постоянная, можно с учетом (17) записать в форме

$$\Lambda=U_S-\langle U_S\rangle=0; \tag{21}$$

здесь U_S выражается из (19). Формулируем задачу Коши: найти стационарную асимптотику при $t\to\infty$ поверхности S, начальное положение S_0 которой известно и на которой v_n удовлетворяет уравнению (13_1), причем выполняется (20), а Λ дано (21).

С. Задача определения фигуры реальной Земли (проблема Молоденского) ([9], [10]). На искомой S известны (через геоцентрические координаты) распределения $\mathbf{g}$ и приращения ΔU потенциала U относительно некоторого исходного пункта O_1. Даны также ω и M. Обозначив $U=$

$=U_{0_1}+\Delta U$ и $\alpha=\pi-(\widehat{\mathbf{g},\mathbf{n}})$, условие на S представим в форме

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left\{\left[g(s')\cos\alpha(s')+\frac{\omega^2}{2}\frac{\partial\Re^2(s')}{\partial n'}\right]\cdot\frac{1}{r}+\left[\Delta U(s')-\Delta U(s)-\frac{\omega^2}{2}\Re^2(s')+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\omega^2}{2}\Re^2(s)\right]\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}ds'+\frac{\omega^2}{2}\Re^2(s)-\Delta U(s)-U_{0_1}=0. \qquad (22)$$

Обозначая сумму членов в левой части, кроме последнего, $\Phi(s)$, определим постоянную U_{0_1} по (17): $U_{0_1}=\langle\Phi(s)\rangle$. Тогда (26) принимает вид

$$\Lambda=\Phi(s)-\langle\Phi(s)\rangle=0. \qquad (23)$$

Кроме того, из формулы Гаусса ([11]) следует

$$\varkappa M=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left[g(s)\cos\alpha(s)-\frac{\omega^2}{2}\frac{\partial\Re^2(s)}{\partial n}\right]ds. \qquad (24)$$

Формулировка задачи Коши – та же, что в задаче В, если в ней (21) заменить на (23), а (20) – на (24). При задании в задачах В и С объема геоида и Земли D_1 отпадает необходимость выполнения соответственно (20) и (24).

4. Если известна фигура, близкая к искомой, то, принимая ее за S_0 и используя малость отклонений S от S_0 по нормали n_0 в $s_0\in S_0$, а также малость угла $(\widehat{\mathbf{n},\mathbf{n}_0})$ (n в $s\in S$, s на n_0), можно линеаризовать (13_1) в окрестности S_0:

$$v_{n_0}=-\frac{t_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_0}\int\limits_{S_0}\Lambda_0\frac{\partial}{\partial n_0'}\left(\frac{1}{r}\right)ds_0'. \qquad (25)$$

Решения линеаризованных задач Коши А и В, в которых за S_0 приняты соответственно сфера Ньютона и нормальный сфероид Клеро, имеют экспоненциальную зависимость от времени и при $t\to\infty$ дают классические результаты Ньютона ([8]) и Стокса — Пуанкаре ([11]).

5. В общем случае для решения задачи Коши (15), (16) применим метод характеристик, если поверхность S_0 не является характеристической ([12, 13]). Для эффективного решения могут быть использованы различные конечно-разностные схемы. При простейшей явной схеме по времени перемещение S по нормали Δn_q на $(q+1)$-м шаге Δt_{q+1} вычисляется по формулам

$$\Delta n_q=v_{n_q}\Delta t_{q+1},\qquad v_{n_q}=-\frac{t_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_q}\int\limits_{S_q}\Lambda_q\frac{\partial}{\partial n_q'}\left(\frac{1}{r}\right)ds_q'.$$

Расчеты заканчиваются при $v_{n_N}=0$ (с заданной точностью).

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Поступило
19 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. М. Ляпунов*, Собр. соч., т. 3, Изд. АН СССР, 1953. [2] *П. Аппель*, Фигуры равновесия однородной вращающейся жидкости, Л.– М., 1936. [3] *Л. Лихтенштейн*, Фигуры равновесия вращающейся жидкости, «Наука», М., 1965. [4] *Н. П. Грушинский*, Теория фигуры Земли, М., 1963. [5] *И. А. Чарный*, Подземная гидрогазодинамика, М., 1963. [6] *А. М. Ляпунов*, Работы по теории потенциала, М.– Л., 1949. [7] *Л. Н. Сретенский*, Теория ньютоновского потенциала, М.– Л., 1946. [8] *Н. П. Идельсон*, Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике, Л.– М., 1936. [9] *М. С. Молоденский*, Центр. н.-и. инст. геодезии, аэрофотосъемки и картограф., в. 42 (1945). [10] *М. С. Молоденский* и др., Там же, в. 131 (1960). [11] *Н. П. Макаров*, Геодезическая гравиметрия, М., 1968. [12] *Г. И. Петровский*, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.– Л., 1949. [13] *Р. Курант*, Уравнения с частными производными, М., 1964.