Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 6

УДК 517.537 *МАТЕМАТИКА*

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Н. И. НАГНИБИДА

О ПОЛНОТЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ НА КРИВОЙ

Пусть Γ — простой спрямляемый контур в комплексной плоскости (z), а $\mu(z)$ — конечная лебегова мера на нем, причем $\int\limits_\Gamma d\mu(z)=\text{const}>0$. Через $L_p(\Gamma,\mu)$, $p>1$, обозначим линейное нормированное пространство всех тех комплекснозначных функций $h(z)$, заданных на Γ, для которых

$$\|h\|_{L_p(\Gamma,\mu)}=\left(\int\limits_\Gamma d\mu(z)\right)^{-1}\left(\int\limits_\Gamma |h(z)|^p\,d\mu(z)\right)^{1/p}<+\infty.$$

В этой заметке находятся условия полноты в пространствах $L_p(\Gamma,\mu)$ систем функций вида

$$\{Ae^{-\gamma\lambda_n z}\sin\alpha\lambda_n z+Be^{-\delta\lambda_n z}\cos\beta\lambda_n z\}_{n=0}^{\infty}, \tag{1}$$

из которых, в частности, следуют соответствующие утверждения о полноте аналогичных систем на отрезке действительной оси *, при этом числа A, B, α, β, γ, δ вещественные и неотрицательные, а $\{\lambda_n\}$ — некоторая последовательность (комплексных) чисел. Отметим в связи с этим, что значение таких условий весьма важно для решения многих задач спектральной теории уравнений математической физики. Вначале, для простоты, подробно доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть контур Γ целиком лежит в области $G_{\rho,\sigma}=\{z:\ |z|\leqslant\pi\rho$ и $|\arg z|\leqslant\pi\sigma\}$, где $0<\rho<1$ и $0\leqslant\sigma\leqslant1$, число γ, $\gamma\geqslant0$, фиксированное, а последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ является множеством единственности для целых функций класса не выше $[1,\pi\rho(1+\gamma^2)^{1/2}]$.*

Если, кроме того, $N_1^{(1)}$ — множество всех целых неотрицательных решений уравнения $\sin(n\operatorname{arc\,tg}(1/\gamma))=0$, а $N_2^{(1)}$ — его дополнение к множеству $N=\{n\}_{n=0}^{\infty}$, то при условии

$$\int\limits^{+\infty}\frac{n(u)-\sigma u}{u^2}\,du=\infty, \tag{2}$$

где $n(u)$ — число точек множества $N_2^{(1)}$, лежащих на интервале $(0,u)$, система $\{e^{-\gamma\lambda_n z}\sin\lambda_n z\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $L_p(\Gamma,\mu)$.

Доказательство. Каждый линейный непрерывный в пространстве $L_p(\Gamma,\mu)$ функционал $\Phi[h]$ имеет вид

$$\Phi[h]=\Phi_g[h]=\int\limits_\Gamma h(z)g(z)\,d\mu(z),$$

где $g(z)\in L_q(\Gamma,\mu)$, $1/p+1/q=1$. Поэтому, учитывая известный критерий С. Банаха полноты, для доказательства нашего утверждения достаточно

* Эту задачу на отрезке действительной оси предложил А. Г. Костиченко в докладе в Институте математики и механики АН АзербССР.

установить, что если для некоторой функции $g(z)\in L_q(\Gamma, \mu)$ выполняются равенства

$$\int_\Gamma e^{-\gamma\lambda_n z} \sin \lambda_n z \cdot g(z)\, d\mu(z) = 0, \quad n\in N, \tag{3}$$

то соответствующий функционал Φ_g является тождественным нулем. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(\xi) = \int_\Gamma e^{-\gamma\xi z} \sin \xi z \cdot g(z)\, d\mu(z).$$

Так как $\sin \xi z = \dfrac{1}{2i}(e^{i\xi z} - e^{-i\xi z})$, то, проведя очевидные оценки, мы легко убеждаемся в том, что $F(\xi)$ является целой функцией класса не выше $[1, \pi\rho(1+\gamma^2)^{1/2}]$. Кроме, того, как видно из (3), $F(\lambda_n)=0$, $n\in N$. Поэтому исходя из предположений теоремы, мы заключаем, что $F(\xi)=0$.

Разлагая теперь функцию $F(\xi)$ в ряд Тейлора, мы очевидным образом получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i-\gamma)^n - (-i-\gamma)^n}{n!} \left[\int_\Gamma z^n g(z)\, d\mu(z) \right] \xi^n \equiv 0.$$

Следовательно,

$$[(i-\gamma)^n - (-i-\gamma)^n] \cdot \left[\int_\Gamma z^n g(z)\, d\mu(z) \right] = 0, \quad n\in N,$$

или же

$$\sin\left(n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\gamma}\right) \int_\Gamma z^n g(z)\, d\mu(z) = 0, \quad n\in N. \tag{4}$$

Но так как при $n\in N_1^{(1)}$, $\sin(n \operatorname{arc\,tg}(1/\gamma))=0$, то из соотношений (4) следует, что

$$\int_\Gamma z^n g(z)\, d\mu(z) = 0, \quad n\in N_2^{(1)}.$$

Теперь остается воспользоваться результатом работы ([1]), где, в частности, доказано, что в случае расходимости интеграла

$$\int^{+\infty} \frac{n(u) - \sigma u}{u^2}\, du$$

(здесь $n(u)$ —число точек множества $N_2^{(1)} \cap (0, u)$) система $\{z^n\}_{n\subset N_2^{(1)}}$ полна в $L_p(\Gamma; \mu)$. Следовательно, функционал Φ_g нулевой и теорема 1 доказана.

Исходя из полученного утверждения и пользуясь различными теоремами единственности для целых функций (см. например, ([2-4])), мы можем теперь легко получать более конкретные условия полноты рассматриваемой системы в пространствах $L_p(\Gamma; \mu)$.

Совершенно аналогично можно исследовать также вопрос о полноте в пространстве $L_p(\Gamma; \mu)$ более общей системы. Поэтому мы ограничиваемся здесь лишь формулировкой соответствующего утверждения.

Т е о р е м а 2. *Пусть контур* Γ *лежит в области* $G_{\rho,\sigma}$, *числа* $A, B, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ *вещественные и неотрицательные, а последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *является множеством единственности для целых функций класса не выше*

$$[1, \pi\rho \max(\alpha^2+\gamma^2)^{1/2} \operatorname{sign} A,\ (\beta^2+\delta^2)^{1/2} \operatorname{sign} B)]. \tag{5}$$

Если, далее, $N_1^{(2)}$ — множество всех целых неотрицательных решений уравнения

$$A((\alpha^2-\gamma^2)^{1/2})^n \sin\left(n \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\gamma}\right)=B((\beta^2+\delta^2)^{1/2})^n\cos\left(n\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\delta}\right),$$

а $N_2^{(2)}$ — его дополнение к N, то система функций (1) *полна в пространстве* $L_p(\Gamma;\mu)$, *если только*

$$\int^{+\infty}\frac{n(u)-\sigma u}{u^2}\,du=\infty,$$

где $n(u)$ — число точек множества $N_2^{(2)}\cap(0,u)$.

Воспользуемся теперь следующей теоремой единственности из работы ([2]). Пусть $\psi(\xi)$ — целая функция класса не выше $[\rho_0,\sigma_0]$, а точки $[\xi_n]_{n=0}^{\infty}$ $\left(\text{такие, что } \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{|\xi_n|^{\rho_0}}=\nu>0\right)$ лежат в угле раствора 2φ, $0\leqslant\varphi<\min(\pi/2,\ \pi/2\rho_0)$ с вершиной в начале координат. Тогда из того, что $\sigma_0<\pi\nu\cos\rho_0\varphi$ и $\psi(\xi_n)=0$, $n=0,1,\dots$, следует $\psi(\xi)\equiv0$.

Из этого утверждения при $\rho_0=1$, $\sigma_0=\pi\rho$, $\varphi=0$ и теоремы 1 при $\gamma=\sigma=0$ мы очевидным образом (беря в качестве контура Γ отрезок $[0,\pi\rho]$ вещественной оси, а в качестве меры $\mu(x)$ — величину $|dx|$) получаем

Следствие 1. *Система* $\{\sin\lambda_n x\}_{n=0}^{\infty}$, $\lambda_n\geqslant0$, *полна в пространствах* $L_p[0,\pi\rho]$, $p>1$, *если только* $\rho<\lim\limits_{n\to\infty}(n/\lambda_n)$.

Предположим теперь, что для множества чисел $N_2=\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ выполняются условия

$$\alpha_{n+1}-\alpha_n>\text{const}>0,\quad n=1,2,\dots,\ \lim_{t\to\infty}\left\{\sum_{\alpha_k<t}(1/\alpha_k)-\sigma\ln t\right\}=+\infty. \tag{6}$$

В этом случае, как показано в работе ([1]), выполняется также условие (5). Следовательно, в формулировках теоремы 1 и 2 условия (5) могут быть заменены условиями (6). Полагая в формулировках полученных таким образом теорем 1^* и 2^* $\sigma=0$, приходим к следующим утверждениям.

Следствие 2. *Пусть контур Γ, последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ и множество целых чисел $N_1^{(1)}$ удовлетворяют условиям теоремы* 1 (*или* 1^*), *а множество $N_2^{(1)}=\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, являющееся дополнением множества $N_1^{(1)}$ к множеству $N=\{n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяет условию* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1/\alpha_k)=\infty$.

Тогда система $\{e^{-\gamma\lambda_n x}\sin\lambda_n x\}$ полна в пространстве $L_p(0,\pi\rho)$, где $0<\rho<1$ и $p\geqslant1$.

Следствие 3. *Пусть контур Γ, последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ и множество $N_1^{(2)}$ удовлетворяют условиям теоремы* 2 (*или* 2^*), *а множество $N_2^{(2)}=\{\beta_n\}_{n=}^{\infty}$, определенное в этой теореме, удовлетворяет условию* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1/\beta_k)=\infty$.

Тогда система (1) *полна в пространстве $L_p(0,\pi\rho)$ при любом ρ, $0<\rho<1$, и $p\geqslant1$.*

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку
Черновицкий государственный университет

Поступило
24 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. И. Ибрагимов, И. С. Аршон*, ДАН, т. 209, № 1 (1973). [2] *F. und R. Nevanlinna*, Acta Soc. Fennical., v. 50, 5 (1922). [3] *А. И. Маркушевич*, Матем. сбор., т. 17, 2, 211 (1945). [4] *И. И. Ибрагимов*, Методы интерполяции функции и некоторые их применения, «Наука», 1971.