

УДК 517.934

МАТЕМАТИКА

М. А. КАКАБАДЗЕ

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 11 II 1974)

Рассмотрим краевую задачу

$$dx_i/dt = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i=1, \dots, n, \quad (1)$$

$$\Phi_i(a_i, b_i; x_i) + \int_a^b x_i(t) d\psi_i(t) = x_{0i}, \quad i=1, \dots, n, \quad (2)$$

где $-\infty < a \leq a_i \leq b_i < b < +\infty$, $-\infty < x_{0i} < +\infty$, $i=1, \dots, n$; $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i=1, \dots, n$, — действительные функции, заданные в области $D_{ab}^n = \{(t, x_1, \dots, x_n) : a < t < b, |x_i| < +\infty, i=1, \dots, n\}$.

$$\Phi_i(a_i, b_i; x) = \begin{cases} \int_{a_i}^{b_i} x(t) d\varphi_i(t) & \text{при } a_i < b_i, \\ x(a_i) & \text{при } a_i = b_i, \end{cases}$$

$\Phi_i(a_i, b_i; 1) \neq 0$, а $\varphi_i(t)$ и $\psi_i(t)$ — функции ограниченной вариации, соответственно на $[a_i, b_i]$ и $[a, b]$, при этом первые члены в краевых условиях (2) считаются главными.

Частными случаями задачи (1), (2) являются, например, задача Коши — Николетти и периодическая краевая задача.

В регулярном случае, когда правые части системы (1) либо непрерывны, либо удовлетворяют условиям Каратеодори, задачи вида (1), (2) исследованы многими авторами (см. например ^(1, 2, 5-8, 10) и указанную там литературу). В сингулярном случае, когда правые части системы (1), вообще говоря, не суммируемы по t на отрезке (a, b) , раньше были исследованы лишь некоторые частные случаи задачи (1), (2) (см. ^(3, 4) и ⁽⁹⁾). В настоящей заметке приведены некоторые новые достаточные условия существования и единственности решения упомянутой задачи.

Ниже приняты следующие обозначения: $K(a, b)$ — множество функций, определенных в области D_{ab}^n и удовлетворяющих локальным условиям Каратеодори, т. е. запись $f(t, x_1, \dots, x_n) \in K(a, b)$ означает, что $f(t, x_1, \dots, x_n)$ непрерывна по $x_1, \dots, x_n$ в R^n при почти всех $t \in (a, b)$, измерима по t на отрезке (a, b) при любом $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ и для каждого $r \in (0, +\infty)$

$$f^*(t, r) = \sup\{|f(t, x_1, \dots, x_n)| : |x_k| \leq r, \quad k=1, \dots, n\} \in L(a, b).$$

$\mathcal{C}(a, b; t_1, \dots, t_m)$, $K(a, b; t_1, \dots, t_m)$ и $L(a, b; t_1, \dots, t_m)$ — множества функций, принадлежащих соответственно к $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ ($\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ — множество абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций), $K(\alpha, \beta)$ и $L(\alpha, \beta)$ для любого промежутка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, который не содержит точек $t_1, \dots, t_m$, $\mathcal{C}(a, b; +\infty) = \mathcal{C}(a, b)$, $K(a, b; +\infty) = K(a, b)$ и $L(a, b; +\infty) = L(a, b)$.

$V(\alpha, \beta; \psi)$ — полная вариация функции $\psi(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, $V(\alpha, \alpha; \psi) = 0$.

Определение 1. Совокупность функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$, заданных на $[a, b]$, называется обобщенным решением системы (1), если найдутся такие числовые последовательности $\{\alpha_{jk}\}_{k=1}^{+\infty}$ и $\{\beta_{jk}\}_{k=1}^{+\infty}$, $j=1, \dots, v$, и последовательности абсолютно непрерывных и равномерно ограниченных на $[a, b]$ функций $\{x_{ik}(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $i=1, \dots, n$, что $a \leq \alpha_{jk} \leq \alpha_{jk+1} \leq \beta_{jk+1} \leq \beta_{jk} \leq b$, $j=1, \dots, v$; $k=1, 2, \dots$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\beta_{jk} - \alpha_{jk}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\alpha_{jk}}^{\beta_{jk}} |x'_{ik}(t)| dt = 0, \quad i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, v,$$

$$x'_{ik}(t) = f_i(t, x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t))$$

при почти всех $t \in [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^v (\alpha_{jk}, \beta_{jk})$, $i=1, \dots, n$, и

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{ik}(t) = x_i(t) \quad \text{при } t \in [a, b], \quad i=1, \dots, n.$$

Под решением задачи (1), (2) понимается обобщенное решение системы (1), удовлетворяющее краевым условиям (2).

Определение 2. Пусть $\Lambda_i(x)$, $i=1, \dots, r$, — непрерывные линейные функционалы, заданные на $C(a, b)$, а $\sigma_i(t)$, $i=1, \dots, r$, — функции ограниченной вариации на $[a, b]$. Скажем, что неотрицательная матрица

$$G(t) = (g_{ik}(t))_{i,k=1}^n, \quad g_{ik}(t) \in L(a, b), \quad i, k=1, \dots, r,$$

принадлежит множеству $N_0(\Lambda_1, \dots, \Lambda_r; \sigma_1, \dots, \sigma_r)$, если система дифференциальных неравенств

$$|x'_i(t)| \leq \sum_{k=1}^r g_{ik}(t) |x_k(t)|, \quad i=1, \dots, r,$$

не имеет нетривиального решения $x_1(t), \dots, x_r(t)$, $x_i(t) \in C(a, b)$, $i=1, \dots, r$, удовлетворяющего условиям

$$|\Lambda_i(x_i)| \leq \int_a^b |x_i(t)| dV(a, t; \sigma_i), \quad i=1, \dots, r.$$

Во всех формулируемых ниже теоремах предполагается, что

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) \in K(a, b; t_{i1}, \dots, t_{iv_i}), \quad i=1, \dots, n, \quad (3)$$

где $t_{ij} \in [a, a_i] \cup [b_i, b]$, либо $t_{ij} = +\infty$, $j=1, \dots, v_i$.

Теорема 1. Пусть $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_m = n$,

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) \operatorname{sign} x_i \leq \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} g_{ik}(t) |x_k| + h_j \left(t, \sum_{k=0}^{n_j-1} |x_k|, \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} |x_k| \right) \quad (4)$$

при $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_{a_i b}^n$, $i=n_{j-1}+1, \dots, n_j$; $j=1, \dots, m$, и

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) \operatorname{sign} x_i \geq - \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} g_{ik}(t) |x_k| - h_j \left(t, \sum_{k=0}^{n_j-1} |x_k|, \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} |x_k| \right) \quad (5)$$

при $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_{ab}^n$, $i = n_{j-1} + 1, \dots, n_j$; $j = 1, \dots, m$, где $x_0 = 0$,

$$(g_{ik}(t))_{i, k=n_{j-1}+1}^{n_j} \in N_0(\Phi_{n_{j-1}+1}, \dots, \Phi_{n_j}; \psi_{n_{j-1}+1}, \dots, \psi_{n_j}), \quad j=1, \dots, m, \quad (6)$$

а функции $h_j(t, \rho_0, \rho) \in K(a, b)$, $j=1, \dots, m$, неотрицательны, не убывают по ρ_0 и ρ

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho} \int_a^b h_j(t, \rho_0, \rho) dt = 0, \quad j=1, \dots, m.$$

Пусть, кроме того, для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ функция $\psi_i(t)$ непрерывна в точках t_{is} , $s=1, \dots, v_i$.

Тогда задача (1), (2) разрешима.

Теорема 2. Пусть при любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $s \in \{1, \dots, v_i\}$ либо $t_{is} \in [a, a_i] \cup (b_i, b)$, либо $t_{is} = a_i = b_i$, $\psi_i(t) \equiv 0$ и $x_{0i} = 0$. Далее, $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_m = n$,

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) \operatorname{sign} x_i \leqslant \\ \leqslant -l_i(t, x_1, \dots, x_n) |x_i| + \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} g_{ik}(t) |x_k| + h_j \left(t, \sum_{k=0}^{n_{j-1}} |x_k|, \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} |x_k| \right)$$

при $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_{a_i b_i}^n$, $i = n_{j-1} + 1, \dots, n_j$; $j = 1, \dots, m$, и

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) \operatorname{sign} x_i \geqslant l_i(t, x_1, \dots, x_n) |x_i| - \\ - \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} g_{ik}(t) |x_k| - h_j \left(t, \sum_{k=0}^{n_{j-1}} |x_k|, \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} |x_k| \right)$$

при $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_{ab_i}^n$, $i = n_{j-1} + 1, \dots, n_j$; $j = 1, \dots, m$, где $x_0 = 0$, функции $g_{ik}(t)$, $i, k = n_{j-1} + 1, \dots, n_j$; $j = 1, \dots, m$, и $h_j(t, \rho_0, \rho)$, $j = 1, \dots, m$, удовлетворяют условиям теоремы 1, а $l_i(t, x_1, \dots, x_n) \in K(a, b; t_{i1}, \dots, t_{iv_i})$, $i = 1, \dots, n$, неотрицательны и при любом $\rho > 0$

$$l_{i\rho}(t) = \inf \{l_i(t, x_1, \dots, x_n) : -\rho \leqslant x_1, \dots, x_n \leqslant \rho\}, \quad i=1, \dots, n,$$

удовлетворяют условиям

$$\int_{t_{ij}}^{t_{ij}+\delta} l_{i\rho}(t) dt = +\infty \quad \text{при } t_{ij} \in [a, a_i] \quad \text{и} \quad \int_{t_{ij}-\delta}^{t_{ij}} l_{i\rho}(t) dt = +\infty \quad \text{при } t_{ij} \in (b_i, b].$$

Тогда задача (1), (2) разрешима и любое ее решение абсолютно непрерывно на $[a, b]$.

Теорема 3. Пусть $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_m = n$,

$$[f_i(t, x_{1i}, \dots, x_{1n}) - f_i(t, x_{2i}, \dots, x_{2n})] \operatorname{sign} (x_{1i} - x_{2i}) \leqslant \sum_{k=1}^{n_j} g_{ik}(t) |x_{1k} - x_{2k}|$$

при $(t, x_{s1}, \dots, x_{sn}) \in D_{a_i b}^n$, $s=1, 2$; $i=n_{j-1}+1, \dots, n_j$; $j=1, \dots, m$, и

$$[f_i(t, x_{11}, \dots, x_{1n}) - f_i(t, x_{21}, \dots, x_{2n})] \operatorname{sign}(x_{1i} - x_{2i}) \geq - \sum_{k=1}^{n_j} g_{ik}(t) |x_{1k} - x_{2k}|$$

при $(t, x_{s1}, \dots, x_{sn}) \in D_{ab_i}^n$, $s=1, 2$; $i=n_{j-1}+1, \dots, n_j$; $j=1, \dots, m$, где функции $g_{ik}(t)$, $k=1, \dots, n_j$, $i=n_{j-1}+1, \dots, n_j$; $j=1, \dots, m$, неотрицательны и удовлетворяют условиям (6).

Тогда задача (1), (2) имеет не более одного абсолютно непрерывного на $[a, b]$ решения.

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
30 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Какабадзе, И. Кизурадзе, Дифференциальные уравнения, т. 7, № 9, 1611 (1971). ² Б. Кведарас, А. Кибенко, А. Перов, Литовск. матем. сборн., т. 5, № 1, 69 (1965). ³ И. Кизурадзе, ДАН, т. 192, № 5, 973 (1970). ⁴ И. Кизурадзе, ДАН, т. 198, № 2, 286 (1974). ⁵ R. Conti, Boll. Unione Mat. Ital., v. 22, № 3, 135 (1967). ⁶ A. Lasota, Zyszyty Nauk., Uniw. Jagiello, Prace Mat., № 11, 41 (1966). ⁷ A. Lasota, C. Olech, Ann. Polon. Math., v. 18, № 2, 131 (1966). ⁸ А. Перов, А. Кибенко, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, № 2, 249 (1966). ⁹ В. Чечик, Тр. Московск. матем. общ., т. 8, 155 (1959). ¹⁰ M. Svec, Mat. Fyz. Sb. Slovensk. Acad. Vied. a Umeni, v. 2, 3 (1952).