

А. С. ХОЛЕВО

К ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НА ОПЕРАТОРНОЙ АЛГЕБРЕ

(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 14 II 1974)

1. Возникающие в приложениях задачи обнаружения и оценки сигнала на фоне помех получают строгую постановку и разрешение в рамках существующей теории статистических решений ⁽¹⁾. В последнее время возник интерес к квантовомеханическим разновидностям таких задач ^(2, 3, 6). В работах ^(4, 5, 7) было предложено «некоммутативное» обобщение теории статистических решений, позволяющее рассматривать с единой точки зрения как классическую статистику, так и упомянутые статистические задачи квантовой физики. С этой точки зрения наблюдаемая система описывается алгеброй фон Неймана $\mathfrak{B}$ ⁽³⁾ в гильбертовом пространстве H (в классическом случае $\mathfrak{B} = L_c^\infty(\Omega)$), где Ω — «пространство наблюдений», в «чисто квантовом» случае $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(H)$), а решающая процедура — измерением, т. е. $\mathfrak{B}$ -значной мерой на пространстве решений U . Точнее, пусть U — измеримое пространство с σ -алгеброй $\mathcal{A}(U)$; U -измерением называется функция $X = \{X(\cdot)\}$ на $\mathcal{A}(U)$ со значениями в $\mathfrak{B}$, удовлетворяющая условиям:

1) $X(A) \geq 0, A \in \mathcal{A}(U)$;

2) для любого счетного разбиения $\{A_i\}$ пространства U $\sum X(A_i) = I$ в смысле слабой операторной топологии.

Если $\{\rho_\theta; \theta \in \Theta\}$ — семейство нормальных состояний ⁽⁸⁾ на $\mathfrak{B}$, $W_\theta(u)$ — функция потерь, то риск, отвечающий измерению X , определится соотношением

$$R_\theta(X) = \int W_\theta(u) \langle \rho_\theta, X(du) \rangle. \quad (1)$$

Задача обобщенной теории статистических решений заключается в отыскании оптимального измерения X , минимизирующего в том или ином смысле риск $R_\theta(X)$. Измерение называется оптимальным байесовским, если оно минимизирует байесовский риск

$$R(X) = \int R_\theta(X) \pi(d\theta),$$

где $\pi(d\theta)$ — априорное распределение на $\mathcal{A}(\Theta)$. Как было указано в ⁽⁵⁾, байесовский риск можно представить как некоторый интеграл по операторнозначной мере $X(du)$. Цель настоящей заметки состоит в описании «естественной» конструкции интеграла (пп. 2–4), позволяющей дать упомянутое представление для $R(X)$ (теорема 3), условия оптимальности (пп. 4–5) и существования оптимального измерения (п. 6) без каких-либо существенных ограничений на $\mathfrak{B}$ и U . Используемые далее без пояснений понятия теории алгебр фон Неймана можно найти, например, в монографии ⁽⁸⁾.

2. Пусть $\tilde{\mathfrak{B}}$ — совокупность эрмитовых элементов $\mathfrak{B}$, $\tilde{\mathfrak{B}}$ — банахово пространство вещественных ультраслабо непрерывных функционалов на $\mathfrak{B}$. Обозначим через $\mathcal{N}$ класс счетнозначных функций на U со значениями в $\tilde{\mathfrak{B}}$. Через $\mathcal{N}_+$ обозначим подкласс функций, удовлетворяющих условию

$\tau \leq \tau(u)$, $u \in U$, для некоторого $\tau \in \mathfrak{B}_*$, через $\mathcal{N}_0$ — подкласс функций, удовлетворяющих условию

$$-\tau \leq \tau(u) \leq \tau, \quad u \in U, \quad (2)$$

для некоторого $\tau \in \mathfrak{B}_*$. Для любой функции $\tau = \{\tau(\cdot)\}$, удовлетворяющей условию (2), положим $\gamma(\tau) = \inf \|\tau\|$, где нижняя грань берется по всем τ , удовлетворяющим (2). Скажем, что функция τ принадлежит $\mathcal{M}(\mathcal{M}_+, \mathcal{M}_0)$, если существует последовательность $\tau_n \in \mathcal{N}(\mathcal{N}_+, \mathcal{N}_0)$ такая, что $\gamma(\tau - \tau_n) \rightarrow 0$.

Функцию $\tau \in \mathcal{N}$ назовем скалярно интегрируемой (квазиинтегрируемой) по X , если для любого представления τ в виде

$$\tau(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i \cdot 1_{A_i}(u), \quad (3)$$

где $\tau_i \in \mathfrak{B}_*$, $\{A_i\}$ — некоторое разбиение U , ряд $\sum \langle \tau_i, X(A_i) \rangle$ сходится безусловно к конечному (или бесконечному) пределу. Если это выполнено, то сумма ряда, не зависящая от способа представления τ в виде (3), обозначается

$$\int \langle \tau(u), X(du) \rangle \quad (4)$$

и называется скалярным интегралом τ по X . Имеет место оценка

$$\left| \int \langle \tau(u), X(du) \rangle \right| \leq \gamma(\tau). \quad (5)$$

Функция $\tau \in \mathcal{M}$ называется скалярно интегрируемой (квазиинтегрируемой), если существует последовательность интегрируемых (квазиинтегрируемых) $\tau_n \in \mathcal{N}$ такая, что $\gamma(\tau - \tau_n) \rightarrow 0$. Тогда существует

$$\lim \int \langle \tau_n(u), X(du) \rangle = \int \langle \tau(u), X(du) \rangle,$$

не зависящий от выбора τ_n .

Предложение 1. Если $\tau \in \mathcal{M}_0$, то τ скалярно интегрируема по любому X . Если $\tau \in \mathcal{M}_+$, то τ скалярно квазиинтегрируема по любому X . Если $\tau \in \mathcal{M}$, то τ локально скалярно интегрируема по любому X , т. е. существует δ -кольцо $\mathcal{A}_\tau$ такое, что $\sigma(\mathcal{A}_\tau) = \mathcal{A}(U)$ и $\tau \cdot 1_A$ скалярно интегрируема для любого $A \in \mathcal{A}_\tau$.

3. Если $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_* = \mathbb{R}$, то $\mathcal{M}$ совпадает с классом $\mathcal{A}(U)$ -измеримых функций, а интеграл (4) — с интегралом вещественной функции по положительной мере. Представление о запасе функций в $\mathcal{M}$ других важных случаях дают следующие результаты.

Предложение 2. $\tau \in \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда существует разбиение $\{A_i\}$ такое, что $\tau \cdot 1_{A_i} \in \mathcal{M}_0$.

Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(H)$, $\mathfrak{B}_* = (\tau\sigma)$ — пространство ядерных операторов в H .

Теорема 1. Функция τ со значениями в $(\tau\sigma)$ принадлежит $\mathcal{M}_0$ тогда и только тогда, когда $\gamma(\tau) < \infty$ и $(\varphi, \tau(u)\varphi)$ измерима для любого $\varphi \in H$.

Пусть Ω — измеримое пространство с мерой m на $\mathcal{A}(\Omega)$ и $\mathfrak{B} = L_\infty^\omega(\Omega)$. Тогда $\mathfrak{B}_* = L_{\mathbb{R}}^1(\Omega)$ и каждая функция τ на U со значениями в $\mathfrak{B}$ задается представителем $\tau_\omega(u)$. Рассмотрим банахово пространство $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(\Omega)$ с нормой

$$\gamma(\tau) = \int \operatorname{ess\,sup}_u |\tau_\omega(u)| m(d\omega).$$

Обозначим через B банахово пространство вещественных измеримых функций на U и через $L_B^1(\Omega)$ — банахово пространство m -интегрируемых отображений из U в B .

Теорема 2. $L^1_B(\Omega)$ изометрично вкладывается в $\mathcal{M}_0(\Omega)$. Если m — атомическая, то $L^1_B(\Omega) = \mathcal{M}_0(\Omega)$.

Вернемся к общему случаю. Пусть Θ — измеримое пространство с вероятностной мерой $\pi(\cdot)$ на $\mathcal{A}(\Theta)$.

Теорема 3. Пусть $\{\rho_\theta\}$ сильно измеримое семейство состояний, $W = \{W_\theta(u); \theta \in \Theta, u \in U\} \in \mathcal{M}(\Theta)$. Тогда интеграл Бохнера

$$\tau(u) = \int W_\theta(u) \rho_\theta \pi(d\theta)$$

задает функцию со значениями в $\mathfrak{B}_*$, принадлежащую $\mathcal{M}$.

Если $W \in \mathcal{M}_+(\Theta)$, то $\tau \in \mathcal{M}_+$ и

$$\int \langle \tau(u), X(du) \rangle = \int \left(\int W_\theta(u) \langle \rho_\theta, X(du) \rangle \right) \pi(d\theta). \quad (6)$$

4. Пусть $\tau \in \mathfrak{B}_*$, $X \in \mathfrak{B}$, тогда соотношение

$$\langle \tau, X, Y \rangle = \langle \tau, X, Y \rangle, \quad Y \in \mathfrak{B},$$

где X, Y — одно из выражений XY , YX , $\frac{1}{2}(XY + YX)$, определяет элемент $\tau, X \in \mathfrak{B}_*$.

Скажем, что $\tau \in \mathcal{N}$ интегрируема по X , если ряд $\sum \tau_n X(A_i)$ слабо безусловно сходится в $\mathfrak{B}_*$ для любого представления τ в виде (3). Так как $\mathfrak{B}_*$ слабо секвенциально полно⁽¹⁰⁾, то предел принадлежит $\mathfrak{B}_*$. Он обозначается $\int \tau(u) X(du)$. Имеет место оценка

$$\left| \left\langle \int \tau(u) X(du), Y \right\rangle \right| \leq \gamma(\tau) \|Y\|.$$

Скажем, что $\tau \in \mathcal{M}$ интегрируема по X , если существует последовательность интегрируемых $\tau_n \in \mathcal{N}$ такая, что $\gamma(\tau - \tau_n) \rightarrow 0$. В силу последнего неравенства существует предел

$$\lim \int \tau_n(u) X(du) = \int \tau(u) X(du),$$

не зависящий от τ_n .

Предложение 3. Если $\tau \in \mathcal{M}_0$, то τ интегрируема по любому X ; если $\tau \in \mathcal{M}$, то τ локально интегрируема по любому X .

Следующая теорема вместе с представлением (6) дает условия оптимальности байесовского измерения.

Теорема 4. Пусть $\tau \in \mathcal{M}_+$. Тогда

$$\inf_x \int \langle \tau(u), X(du) \rangle = \max\{\langle \tau, I \rangle: \tau \in \tilde{\mathfrak{B}}_*, \tau \leq \tau(u)\}. \quad (7)$$

Следующие условия эквивалентны:

1) нижняя грань в левой части достигается для $X_0 = \{X_0(\cdot)\}$, максимум в правой части достигается для τ_0 ;

2) τ_0 удовлетворяет условию $\tau_0 \leq \tau(u)$, $u \in U$ и

$$\int_A (\tau(u) - \tau_0) X_0(du) = 0, \quad A \in \mathcal{A}_\tau;$$

3) $\tau(u)$ интегрируема по X_0 , $\int \tau(u) X_0(du) = \tau_0$ и $\tau_0 \leq \tau(u)$, $u \in U$.

Элемент τ_0 определяется однозначно.

Частные случаи этой теоремы рассматривались в^(3, 5). Наше доказательство основано на применении принципа двойственности Лагранжа⁽¹¹⁾ к задаче в левой части (7) и использовании некоторых специфических свойств пространства $(\mathfrak{B}_*)^{**} = \mathfrak{B}^*$ ⁽¹²⁾.

5. Пусть Θ — измеримое пространство и $\{\rho_\theta; \theta \in \Theta\}$ — семейство состояний, которое, как функция от Θ , принадлежит $\mathcal{M}_+$. Скажем, что X_0 являет-

ся измерением максимального правдоподобия, если для любого $A \in \mathcal{A}(\Theta)$

$$\int_A \langle \rho_\theta, X_0(d\theta) \rangle \geq \int_A \langle \rho_\theta, X(d\theta) \rangle$$

для любого X , удовлетворяющего условию $X(A) = X_0(A)$.

Если $\rho = \rho_{(\cdot)} \in \mathcal{M}_0$, то это равносильно тому, что

$$\int \langle \rho_\theta, X_0(d\theta) \rangle \geq \int \langle \rho_\theta, X(d\theta) \rangle \quad \forall X.$$

Обозначим $\mathfrak{B}_0$ *-подалгебру, порождаемую элементами вида $\sqrt{X_0(A)} Y \sqrt{X_0(A)}$; $Y \in \mathfrak{B}$, $A \in \mathcal{A}_\rho$. Если τ — линейный функционал на $\mathfrak{B}_0$, то для любого $A \in \mathcal{A}_\rho$ $\langle \tau, \sqrt{X_0(A)} Y \sqrt{X_0(A)} \rangle$ является функционалом на $\mathfrak{B}$, который обозначается $\sqrt{X_0(A)} \tau \sqrt{X_0(A)}$.

Предложение 4. Для того чтобы X_0 было измерением максимального правдоподобия, необходимо и достаточно, чтобы существовал функционал τ на $\mathfrak{B}_0$ такой, что

1) $\tau \geq \rho_\theta$; $\theta \in \Theta$;

2) для любого $A \in \mathcal{A}_\rho$, $\sqrt{X_0(A)} \tau \sqrt{X_0(A)} \in \mathfrak{B}$. и

$$\langle \tau, X_0(A) \rangle = \int_A \langle \rho_\theta, X_0(d\theta) \rangle.$$

Примеры применения теорем 3, 4 и предложения 4 в квантовой статистике даны в (6).

6. Пусть U — полное метрическое пространство, $\mathcal{A}(U)$ — σ -алгебра борелевских множеств. Обозначим через $\mathcal{C}$ класс функций на U вида $\tau(u) = \sum \tau_i f_i(u)$, где $\tau_i \in \mathfrak{B}_+$, f_i — вещественные непрерывные функции, а также класс пределов последовательности таких функций в смысле $\gamma(\cdot)$. Очевидно, $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$; положим $\mathcal{C}_+ = \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_+$.

Скажем, что $\tau_n \rightarrow +\infty$, если $\|(\tau - \tau_n)_+\| \rightarrow 0$ для любого $\tau \in \mathfrak{B}_+$.

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{B}$ сепарабельно, $\tau \in \mathcal{C}_+$ и пусть существуют последовательность компактов K_n и последовательность элементов $\tau_n \in \mathfrak{B}_+$, $\tau_n \rightarrow +\infty$, такие, что $\tau(u) \geq \tau_n$, $u \in K_n^c$.

Тогда функционал $\int \langle \tau(u), X(du) \rangle$ достигает минимума в крайней точке множества всех U -измерений.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
11 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Wald, Statistical Decision Functions, N. Y., 1950. ² C. W. Helstrom, J. Liu, J. Gordon, Proc. IEEE, v. 58, 1578 (1970). ³ H. P. H. Yuen, R. S. Kennedy, M. Lax, Proc. IEEE, v. 58, 1770 (1970). ⁴ А. С. Холево, Тр. Московск. матем. общ., т. 26, 133 (1972). ⁵ А. С. Холево, Proc. Second Japan — USSR Symp. Prob. Theory, v. 1, 22 (1972). ⁶ Р. Л. Стратонович, Stochastics, v. 1, 87 (1973). ⁷ А. С. Холево, J. Multivariate Analysis, v. 3, 350 (1973). ⁸ J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Paris, 1969. ⁹ N. Dinculeanu, Vector measures, Berlin, 1967. ¹⁰ S. Sakai, Proc. Jap. Acad., v. 33, 439 (1958). ¹¹ D. G. Luenberger, Optimization by Vector Space Methods, N. Y., 1969. ¹² M. Takesaki, Proc. Japan Acad., v. 35, 365 (1959).