

УДК 532.5:534

ГИДРОМЕХАНИКА

В. А. ПРОКОФЬЕВ

РАСЩЕПЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ИЗЛУЧАЮЩЕЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 11 I 1974)

Распространение возмущений в неподвижной равновесной вязкой теплопроводной сжимаемой жидкости с учетом термической эмиссии и абсорбции и некогерентного рассеяния электромагнитной энергии описывается линеаризованными уравнениями Навье — Стокса (в безразмерном виде в обозначениях статей ^(1, 2); $t_1 = tw$, $\tilde{p} = p/h_1$, $\tilde{T} = h_2 I/h_1$; значение R и уравнение переноса радиации даны в ⁽²⁾)

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t_1 + \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, & \tilde{p} &= \rho + \tilde{T}, & U &= h_3 \rho + h_4 T, \\ \partial \mathbf{v} / \partial t_1 + \nabla \tilde{p} / \gamma - N_{\text{Re}}^{-1} \Delta \mathbf{v} + (N_{\text{Re}}^{-1} - Xw) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \partial U / \partial t_1 + p_0 (\rho_0 U_0)^{-1} \operatorname{div} \mathbf{v} - h_4 \Theta w \Delta T - h_4 Z R &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагая существование κ -кратного преобразования Фурье и его обращения

$$g^*(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}, t) e^{i\lambda \mathbf{x}} dX, \quad g(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi^\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(\lambda, t) e^{-i\lambda \mathbf{x}} d\Lambda, \quad (2)$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_\kappa\}, \quad \lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_\kappa\}, \quad dX = dx_1 \dots dx_\kappa, \quad d\Lambda = d\lambda_1 \dots d\lambda_\kappa$$

и что на бесконечности обращаются в нуль функции p , $\mathbf{v}$, J_v , производные $\partial \mathbf{v} / \partial x_j$ при учете вязкости и $\partial T / \partial x_j$ при учете теплопроводности, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений ⁽²⁾. Детерминант характеристической матрицы $M(n)$ ее для фундаментальной системы решений вида $g^*(\lambda, t) = g^{0*}(\lambda) \exp(\lambda n t_1)$ равен

$$D(n) = (n + \sigma_1)^2 D_0(n), \quad D_0(n) = n^3 + (X_1 + Y_1)n^2 + (1 + X_1 Y_1)n_0 + (Y_1 + Y_{11})\gamma^{-1} = 0; \quad (3)$$

$D_0(n)$ — детерминант характеристической матрицы системы уравнений для ρ^* , T^* , $\lambda^0 \mathbf{v}^*$. Каждому простому корню соответствуют решения

$$\begin{aligned} \tilde{T}_k^*(\lambda, t) &= C_k(\lambda) \exp(\lambda n_k t_1), & \rho_k^* &= -(\gamma n_k^2 + \gamma X_1 n_k + 1)^{-1} \tilde{T}_k^*, \\ \lambda^0 \mathbf{v}^* &= -i n_k \rho_k^*; & \lambda^0 &= \lambda / \lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

Если $n_k = -\sigma_1$, и является простым корнем уравнения $D_0 = 0$, то матрица $M(n)$ четвертого ранга, справедливы равенства (4) и, кроме того,

$$\mathbf{v}^* = i \lambda^0 n_k (\gamma n_k^2 + \gamma X_1 n_k + 1)^{-1} \tilde{T}_k^*. \quad (5)$$

Если $n = -\sigma_1 \neq 0$, $D_0(-\sigma_1) = 0$, то сохраняются в силе (4), а компоненты скорости остаются неопределенными; равенство $D_0(-\sigma_1) = 0$ может выполняться при заданных свойствах среды лишь в дискретных точках пространства (γ, X_1, Y_1) и при обращении Фурье этот корень не может влиять на величину интегралов по λ . Если $n_k = -\sigma_1$, $D_0(-\sigma_1) \neq 0$, то матрица $M(n)$ третьего ранга, фундаментальная система решений для множителей g^{0*} при экспонентах

$$\begin{aligned} e_1 &= (T^{0*} = 0, \rho^{0*} = 0, \mathbf{v}_1^{0*} = -\lambda_2 / \lambda_1, \mathbf{v}_2^{0*} = 1, \mathbf{v}_3^{0*} = 0), \\ e_2 &= (T^{0*} = 0, \rho^{0*} = 0, \mathbf{v}_1^{0*} = -\lambda_3 / \lambda_1, \mathbf{v}_2^{0*} = 0, \mathbf{v}_3^{0*} = 1) \end{aligned} \quad (6)$$

соответствует возмущению одной лишь скорости, относится к случаю не-сжимаемой жидкости.

Кратные корни характеристического уравнения $D_0(n)=0$ могут быть лишь в дискретных точках пространства (γ, X_1, Y_1) и не влияют на обращения Фурье.

Общее решение системы уравнений для трансформаций при простых корнях уравнения $D_0=0$ получится суммированием (4), что совместно с (2) дает решение системы (1).

Рассмотрим задачу Коши: найти функции $g_j=[T, \rho, v(x, t)]$, $j=1, 2, 7$, удовлетворяющие (1) при $t>0$, а при $t=0$ принимающие заданные значения $g_j^0(x)=T_0(x)$, $\rho_0(x)$, $v_0(x)$. Соответствующие данные Коши для трансформаций равны g_j^{0*} ,

$$\Delta_k C_k = (n_k^2 + X_1 n_k + \gamma^{-1}) \tilde{T}_0^*(\lambda) - \gamma^{-1}(\gamma - 1) \rho_0^*(\lambda) + i(\gamma - 1) n_k \lambda^0 v_0^*, \quad (7)$$

$$\Delta_k = 3n_k^2 + 2(X_1 + Y_1)n_k + 1 + X_1 Y_1.$$

В соответствии с (7) решение запишется в виде

$$g_1; g_2; g_7(x, t) = (\gamma - 1)^{-1} S' \{ (\gamma - 1) G_k^{(1)}; (1 + Y_1 n_k^{-1}) G_k^{(1)}; \lambda^0 (n_k + Y_1) G_k^{(2)} \}; \quad (8)$$

$$G_k^{(1)} = (n_k^2 + X_1 n_k + \gamma^{-1}) F_1'' - (\gamma - 1) \gamma^{-1} F_2'' + (\gamma - 1) n_k \lambda^0 F_7',$$

$$G_k^{(2)} = - (n_k^2 + X_1 n_k + \gamma^{-1}) F_1' + (\gamma - 1) \gamma^{-1} F_2' + (\gamma - 1) n_k \lambda^0 F_7''; \quad (9)$$

$$S'; S\{f\} \equiv \pi^{-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_k \Delta_k^{-1} \exp(\lambda n_k t_1); \Delta_1^{-1} \right) f(\lambda) d\lambda;$$

$$F_j'; F_j'' \equiv 2^{-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_j^0(\xi) \frac{\sin}{\cos} [\lambda(x - \xi)] dZ.$$

Величины $n_k, X_1, Y_1, Y_{11}, Y_1' = Y_1 + Y_{11}$ — нечетные функции $|\lambda|$, $F_j'', \lambda F_j'$ — четные функции λ . Для комплексных корней $(n_1 = n_0, n_{2,3} = -\alpha \pm i\beta; n_0, \alpha, \beta \geq 0)$

$$\begin{aligned} T(x, t) = & S \{ F_1'' [(n_0^2 - X_1 n_0 + \gamma^{-1}) s + (\gamma n_0)^{-1} \{ (Y_1 - n_0) (\gamma n_0^2 \alpha - n_0 + \alpha - Y_1) + \\ & + Y_{11} (\alpha - Y_1) \} s' + \{ 1 - \gamma^{-1} + X_1 Y_1 + (2n_0 - 2Y_1 - X_1) n_0 \} s''] + \\ & + \gamma^{-1} F_2'' [\{ \gamma - 1 + \gamma Y_{11} (n_0 - X_1) \} (s'' - s) + \{ (\gamma - 1) (\alpha - n_0) + \\ & + \gamma Y_{11} (n_0^2 + Y_1 n_0 - n_0 \alpha - X_1 \alpha + 1 + X_1 Y_1) \} s'] + \\ & + \lambda^0 F_7' [((\gamma - 1) n_0 - Y_{11}) (s + s'') - \{ \beta^2 (n_0 - Y_1)^2 - \\ & - (\beta^2 - \alpha^2 + X_1 \alpha - \gamma^{-1}) (n_0^2 + \beta^2 - \alpha^2 + X_1 \alpha - n_0 \alpha) \} s']; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \gamma \rho(x, t) = & S \{ F_1'' [s'' - s + (\alpha - n_0) s'] + F_2'' [(Y_1' n_0^{-1} - 1) s + \\ & + \{ (\alpha - n_0) (1 - \gamma n_0 \alpha) + \gamma n_0 \beta^2 \} s' + \{ 2\gamma n_0^2 - \gamma n_0 (X_1 + Y_1) + 1 \} s''] + \\ & + \gamma \lambda^0 F_7' [(Y_1 - n_0) (s - s'') + \{ \beta^2 + (n_0 - \alpha) (Y_1 - \alpha) \} s']; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \gamma v(x, t) = & S \{ \lambda^0 F_1' [n_0 (s'' - s) + (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha n_0) s'] + \\ & + \lambda^0 F_2' [(Y_1' - n_0) (s - s'') + \{ \beta^2 + (n_0 - \alpha) (Y_1 - \alpha) \} s'] + \\ & + \gamma \lambda^0 (\lambda^0 F_7'') [n_0 (n_0 - Y_1) s + \{ (Y_1 - \alpha) (\alpha^2 + \beta^2 - n_0 \alpha) - n_0 \beta^2 \} s' + \\ & + (\alpha^2 + \beta^2 - 2n_0 \alpha + Y_1 n_0) s'']; \end{aligned} \quad (12)$$

$$s = \exp(-\lambda n_0 t_1); \quad s', s'' = \exp(-\lambda \alpha t_1) (\beta^{-1} \sin \lambda \beta t_1, \cos \lambda \beta t_1).$$

В интегралах, определяющих решение, параметр λ изменяется от 0 до ∞ . В случае нерассеивающей квазиравновесной среды на плоскости X_1, Y_1 при этом описывается некоторая простая кривая $Y_1 = Y_1(X_1)$, выходящая из начала $X_1 = Y_1 = 0$ и асимптотически устремляющаяся к прямой $Y_1 = \sigma X_1, \sigma = \Theta/X$. Точкам этой кривой соответствуют простые корни характеристического уравнения $D_0 = 0$. Кратные корни получаются лишь в изолированных точках пересечения с дискриминантной кривой этого уравнения. Один корень всегда действительный. В некотором диапазоне $0 \leq \lambda < \lambda_1$, зависящем от γ и других физических свойств среды, которыми определяются величины X_1, Y_1 , два других корня всегда комплексные. Кроме этого могут существовать и другие интервалы λ , которым соответствуют комплексные корни. Обозначим совокупность этих интервалов l_2 , соответствующую область $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — через G_2 , а их дополнения соответственно до полупрямой и до E — через l_1 и G_1 . Из правых частей (10) — (12) всегда можно выделить члены $g_j^{(1)}(x, t)$, которые определяются действительными корнями и описывают «подавленный волновой пакет», затухающий со временем и диффундирующий в среде. Остальные члены описывают «бегущий волновой пакет» $g_j^{(2)}(x, t)$, который обязан своим существованием комплексным корням в области G_1 , формируется суммированием синусоидальных волн и, как и подавленный пакет, с течением времени затухает и диффундирует в среде. Локализованное начальное возмущение расщепляется на два. Формулы (10) — (12) можно представить в форме

$$g_i^{(1)}(x, t) = S\{F_i^{(j)}(\lambda, x)\} + \int \sum_{G_1, k=1,2} e^{\lambda n_k t} \Delta_k^{-1} F_k^{(j)}(\lambda, x) d\lambda, \quad (13)$$

$$g_j^{(2)}(x, t) = \int_{G_2} e^{-\lambda \alpha t} \Phi(\lambda, x) d\lambda. \quad (14)$$

Из решения видно, что локальное начальное возмущение в любой последующий момент времени сказывается в любой точке. Это соответствует смыслу закона теплопроводности Фурье и пренебрежению членами, соответствующими скорости света в знаменателе, использованных в исходных уравнениях радиационной газовой динамики.

В пределе исчезающей диссипации ($X, \Theta, Z \rightarrow 0, \Delta = 1$)

$$\begin{aligned} \gamma g_1(x, t) &= g_5^0 + (\gamma - 1) S\{F_4'' \cos \lambda t_1 + \gamma \lambda^0 F_7' \sin \lambda t_1\}; \\ \gamma g_2(x, t) &= -g_5^0 + S\{F_4'' \cos \lambda t_1 + \gamma \lambda^0 F_7' \sin \lambda t_1\}; \\ \gamma g_7(x, t) &= S\{\lambda^0 (F_4' \sin \lambda t_1 - \gamma \lambda^0 F_7'' \cos \lambda t_1)\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Начальное возмущение энтропии $g_5 = g_1 - (\gamma - 1) g_2$ сохраняется. Возмущения давления $g_i = \tilde{p}$ и скорости g_7 состояются из бегущих волн давления и скорости, а возмущения g_1, g_2 еще и из подавленного «энтропийного импульса».

При X, Θ, Z , отличных от нуля, и $\gamma \neq 1$ подавленная волна и бегущие волны каждой из функций g_j определяются начальными возмущениями двух термодинамических параметров и скорости. Это остается в силе, если хотя бы одна из величин θ или Z отлична от нуля независимо от того, вязкая жидкость или нет. Общий волновой характер движения, возникающего в идеальной жидкости, сохраняется и при учете диссипативных процессов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. А. Прокофьев, ДАН, т. 194, № 6, 1290 (1970). ² В. А. Прокофьев, ДАН, т. 214, № 6, 1294 (1974).