Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 1

УДК 513.831 *МАТЕМАТИКА*

Б. ШАПИРОВСКИЙ

КАНОНИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА И ХАРАКТЕР. ПЛОТНОСТЬ И ВЕС В БИКОМПАКТАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 6 II 1974)

Следствия 1^0—5^0 этой работы дают представление о ее направлении и основных результатах. Относительно неразъясненных обозначений и понятий см. ([3], [5], [9]). Всюду далее α, β, σ, δ, ω — ординальные числа и τ, λ, ν, μ — кардинальные. Обозначим через $\bigvee_\tau \mathscr{A}$ структурное объединение τ экземпляров семейства $\mathscr{A}$ подмножеств из X * и пусть $\bigvee_{\tau*}\mathscr{A}=\cup\{\bigvee_\lambda \mathscr{A}:\ \lambda<\tau\}$. Положим $\mu^{\tau*}=\sum\{\mu^\lambda:\ \lambda<\tau\}$. Ясно, что $|\bigvee_\tau \mathscr{A}|=|\mathscr{A}|^\tau$ и $|\bigvee_{\tau*}\mathscr{A}|=|\mathscr{A}|^{\tau*}$.

Теорема 1^0. *Пусть X — бикомпактное пространство, $t(X)\leqslant\aleph_0$ и $\psi(F, X)\leqslant\aleph_1$ для всякого замкнутого $F\subset X$. Тогда $\bar{s}(X)\leqslant\aleph_1$.*

Доказательство. Предположим, что для всех $\alpha<\alpha'<\omega_1$ уже определены F_α — замкнутое в X множество и $\mathscr{B}_\alpha$ — псевдобаза F_α в X такие, что $s(F_\alpha)\leqslant\aleph_1$ и $|\mathscr{B}|\leqslant\aleph_1$. Построим $F_{\alpha'}$ и $\mathscr{B}_{\alpha'}$. Положим $\mathscr{G}_{\alpha'}=\cup\{\mathscr{B}_\alpha:\ \alpha<\alpha'\}$ и для всякого $U\in\bigvee_{\omega_0*}\mathscr{G}_{\alpha'}$ такого, что $U\neq X$, зафиксируем $x(U)\in X\setminus U$. Положим $S_{\alpha'}=\{x(U):\ U\in\bigvee_{\omega_0}\mathscr{G}_{\alpha'},\ U\neq X\}$, $F_{\alpha'}=[S_{\alpha'}\cup\cup\{F_\alpha:\ \alpha<\alpha'\}]$ и пусть $\mathscr{B}_{\alpha'}$ — псевдобаза $F_{\alpha'}$ в X такая, что $|\mathscr{B}_{\alpha'}|\leqslant\aleph_1$. Так как $t(X)\leqslant\aleph_0$, то $F=\cup\{F_\alpha:\ \alpha<\omega_1\}$ замкнуто в X и в силу построения $F=X$ и $s(X)\leqslant\aleph_1$. Аналогично, $s(H)\leqslant\aleph_1$ для всякого замкнутого $H\subset X$ и, следовательно, ([3в], [9б]) $\bar{s}(X)\leqslant\aleph_1$.

Следствие 1^0. *Плотность совершенно-нормального бикомпакта $\leqslant\aleph_1$.*

Метод, излагаемый далее и являющийся модификацией и уточнением рассуждения из теоремы 1^0, наряду с новыми утверждениями дает единый подход к доказательству ряда хорошо известных результатов.

Определения и обозначения. Пусть $L\subset X\supset M$ и $\mathscr{A}$ — семейство множеств из X. Будем говорить, что L τ-симметрично (τ*-симметрично) M относительно семейства $\mathscr{A}$, если $L\subset A\Leftrightarrow A\supset M$ для всех $A\in\bigvee_\tau\mathscr{A}$ ($A\in\bigvee_{\tau*}\mathscr{A}$); L τ-c-симметрично M (τ*-c-симметрично) M относительно $\mathscr{A}$, если $L\subset[A]\Leftrightarrow[A]\supset M$ для всех $A\in\bigvee_\tau\mathscr{A}$ ($A\in\bigvee_{\tau*}\mathscr{A}$). Положим $\nabla t(X)=\min\{\tau:\ [M]=\cup\{[M]_\nu:\ \nu<\tau\}$ для всех $M\subset X\}$; $\nabla c(X)=\min\{\tau:\ |\mathscr{D}|<\tau$ для всякого дизъюнктного семейства $\mathscr{D}$ открытых в X множеств$\}$; $\nabla\mathrm{ic}\,(X)=\min\{\tau:$ всякое открытое покрытие $\mathscr{P}$ содержит подпокрытие $\mathscr{P}'\subset\mathscr{P}$ такое, что $|\mathscr{P}'|<\tau\}$. Назовем семейство $\mathscr{B}$ открытых в X множеств $s\pi$-базой A в X, если $A\subset[\cup\{B\in\mathscr{B}:\ B\subset U\}]$ для всякого открытого в X множества $U\supset A$. Положим $s\pi\chi(A, X)=\min\{|\mathscr{B}|:\ \mathscr{B}$ — $s\pi$-база A в $X\}$ **.

Лемма 1. *Пусть L τ*-симметрично M относительно семейства $\mathscr{B}$ подмножеств из X, $\nabla\mathrm{ic}\,(X)\leqslant\tau$ и $M\subset H$, где $H=\cup\{F:\ F\in\mathscr{F}\}$ замкнуто в X и $\mathscr{B}$ — псевдобаза F в X при $F\in\mathscr{F}$. Тогда и $L\subset H$.*

---

* Пусть Φ — система семейств подмножеств пространства X, $\tilde{\Phi}=\Pi\{\mathscr{F}:\ \mathscr{F}\in\Phi\}$ и $\pi_{\mathscr{F}}$ — проекция $\tilde{\Phi}$ на $\mathscr{F}$. Тогда положим $\vee\,\{\mathscr{F}:\mathscr{F}\in\Phi\}=\{\cup\{\pi_{\mathscr{F}}(\bar{A}):\ \mathscr{F}\in\Phi\}:\ \bar{A}\in\tilde{\Phi}\}$. Если $|\Phi|=\tau$ и $\mathscr{A}=\mathscr{F}$ для всех $\mathscr{F}\in\Phi$, то положим $\vee_\tau\mathscr{A}=\vee\{\mathscr{F}:\ \mathscr{F}\in\Phi\}$.

** Семейство $\mathscr{F}$ назовем π-сетью A в X, если для всякого открытого в X множества $U\supset A$ существует непустое $B\in\mathscr{F}$ такое, что $B\subset U$. π-Сеть $\mathscr{F}$ из открытых множеств называется π-базой A в X ([5]). Положим $\pi\chi(Y|X)=\sup\{\pi\chi(y, X):\ y\in Y\subset X\}$. Ясно, что $\pi\chi(X|X)=\pi\chi(X)$. Аналогично определяются $\chi(Y|X)$, $h(Y|X)$ и т. п. Семейство $\mathscr{F}$ — π-сеть в X, если $\mathscr{F}$ — π-сеть x в X для всех $x\in X$ ([6]).

Доказательство. Если $x_0 \in L \setminus H$, то по условиям существует $\mathscr{P} \subset \mathscr{B}$, для которого $M \subset \cup\{U\colon U \in \mathscr{P}\} \not\ni x_0$ и $|\mathscr{P}| < \tau$, что противоречиво, поскольку L τ^*-симметрично M относительно $\mathscr{B}$.

Лемма 2. *Пусть L τ^*-с-симметрично M относительно семейства $\mathscr{B}$ подмножеств T_3-пространства X, $\nabla c(X) \leqslant \tau$ и $M \subset [H]$, где $H = \cup\{F\colon F \in \mathscr{F}\}$ и $\mathscr{B}$ — $s\pi$-база F в X при $F \in \mathscr{F}$. Тогда $L \subset [H]$.*

Доказательство. Если $L \setminus [H] \neq \Lambda$, то существует открытое в X множество U такое, что $U \cap L \neq \Lambda$ и $H \subset X \setminus [U] = V$. Очевидно, что тогда $M \subset \subset [H] \subset [U\{B \in \mathscr{B}\colon B \subset V\}] \subset X \setminus U$ и, следовательно, существует $\mathscr{D} \subset \mathscr{B}$, для которого $|\mathscr{D}| < \nabla c(X) \leqslant \tau$ и $M \subset [\cup\{B\colon B \in \mathscr{D}\}] \subset X \setminus U$. Однако это приводит к противоречию, поскольку L τ^*-с-симметрично M относительно $\mathscr{B}$.

Положим $\operatorname{Log}_\lambda \tau = \min\{\nu\colon \tau < \lambda^\nu\}$, $m(\tau) = \operatorname{Log}_\tau \tau$, $\operatorname{Ln} \tau = \operatorname{Log}_2 \tau$ и отметим ряд полезных свойств функции $\operatorname{Log}_\lambda \tau$.

1) $m(\tau)$ — регулярный кардинал и $m(\tau) \leqslant \operatorname{cf}(\tau)$. Действительно, пусть $m(\tau) = \sum\{\nu\colon \nu \in C\}$, где $|C| = \operatorname{cf}(m(\tau))$ и $\nu < m(\tau)$ при $\nu \in C$. Тогда $\tau < \tau^{m(\tau)} = \tau^{\Sigma\{\nu; \nu \in C\}} = \prod\{\tau^\nu\colon \nu \in C\} = \tau^{|C|}$. Следовательно, $\tau < \tau^{|C|}$ и $|C| \geqslant m(\tau)$. Ясно также, что $\tau < \tau^{\operatorname{cf}(\tau)}$.

2) $m(\tau) \leqslant \operatorname{cf}(\operatorname{Ln}(\tau)) \leqslant \operatorname{Ln}(\tau) \leqslant \tau$. Доказательство аналогично.

3) $\lambda < \operatorname{Ln}(2^\lambda) = m(2^\lambda) \leqslant \operatorname{cf}(2^\lambda) \leqslant 2^\lambda$ и $\operatorname{Ln}(2^\lambda)$ регулярен. Достаточно показать, что $\operatorname{Ln}(2^\lambda) \leqslant m(2^\lambda)$. Действительно, положим $m(2^\lambda) = \tau$. Тогда $2^\lambda < (2^\lambda)^\tau = 2^{\lambda\tau} = 2^\tau$ и, значит, $\operatorname{Ln}(2^\lambda) \leqslant \tau$. Так, если $2^\nu = 2^{\aleph_1}$ при $\nu < 2^{\aleph_0}$, то $2^{\aleph_0}$ регулярен.

4) $\tau^{\nu^*} = \tau \Leftrightarrow \nu \leqslant m(\tau)$.

4′) Если ν регулярен, то $\tau^{\nu^*} = (\tau^{\nu^*})^{\nu^*}$.

Предложение 1. *Пусть $Y \subset X$ и: 1) $\nabla t(X) \leqslant \operatorname{cf}(\tau)$; 2) $\nabla \operatorname{ic}(X) = \nu \leqslant m(\tau)$; 3) $\psi([S]_X, Y \cup [S]_X) \leqslant \tau$ для всякого $S \subset Y$ такого, что $|S| \leqslant \tau$. Тогда $s(Y) \leqslant \tau$.*

Доказательство. Предположим, что для каждого $\alpha < \alpha' < \tau$ уже построены $S_\alpha \subset Y$, $F_\alpha = [S_\alpha]$ и семейство $\mathscr{B}_\alpha$ открытых в X множеств такие, что: a) $|S_\alpha| \leqslant \tau$, b) $|\mathscr{B}_\alpha| \leqslant \tau$, c) $\{(Y \cup F_\alpha) \cap U\colon U \in \mathscr{B}_\alpha\}$ — псевдобаза F_α в $Y \cup F_\alpha$. Положим $\mathscr{G}_{\alpha'} = \cup\{\mathscr{B}_\alpha\colon \alpha < \alpha'\}$, $S_{\alpha'} = \{x(U)\colon U \bigvee_{\nu^*} \mathscr{G}_{\alpha'},\ Y \setminus U \neq \Lambda\}$, где $x(U) \in Y \setminus U$, $S_{\alpha'} = S_{\alpha'} \cup \cup\{S_\alpha\colon \alpha < \alpha'\}$ и $F_{\alpha'} = [S_{\alpha'}]$. В силу a), b) и 2) $|S_{\alpha'}| \leqslant \tau$ и в силу 3) существует семейство $\mathscr{B}_{\alpha'}$, отвечающее условиям b) и c). Таким образом, можно считать построенными множества $S = \cup\{S_\alpha\colon \alpha < \tau\} \subset Y$ и $F = \cup\{F_\alpha\colon \alpha < \tau\}$. Но $F_\alpha \subset F_\beta$ при $\alpha < \beta < \tau$ и в силу 1) $F = [S]$. Кроме того, по построению S ν^*-симметрично Y относительно семейства $\mathscr{G} = \cup\{\mathscr{G}_\alpha\colon \alpha < \tau\}$, поскольку $\nu \leqslant m(\tau) \leqslant \operatorname{cf}(\tau)$ и $\bigvee_{\nu^*} \mathscr{G} = \cup\{\bigvee_{\nu^*} \mathscr{G}_\alpha\colon \alpha < \tau\}$. Значит, по лемме 1 $Y \subset F = [S]$ и, следовательно, $s(Y) \leqslant |S| \leqslant \tau$.

Теорема 1$^{0'}$. *Пусть X — бикомпакт и $Z \subset X$. Тогда $\bar{s}(Z) \leqslant (t(X)\bar{c}(Z))^+$.*

Доказательство. Существует $Y \subset Z$ такое, что $Z \subset [Y]$ и $\overline{\operatorname{ic}}(Y) \leqslant \bar{c}(Z)$ [9a]. Следовательно, $\psi([S]_X, Y \cup [S]_X) \leqslant \overline{\operatorname{ic}}(Y)$ для всех $S \subset X$, и, положив $\tau = (t(X)\bar{c}(Z))^+$, в силу предложения 1 получаем $s(Z) \leqslant s(Y) \leqslant \tau$. Но поскольку $\bar{c}(Z') \leqslant \bar{c}(Z)$ для всех $Z' \subset Z$, то и $\bar{s}(Z) \leqslant \tau$. Кроме того, $t(X) \leqslant \bar{c}(X)$ [3в, 9a] и справедлива

Теорема 1. *Пусть X — бикомпакт. Тогда $\bar{s}(X) \leqslant \bar{c}(X)^+$* *.

Следствие 1. *Плотность наследственно суслинского бикомпакта $\leqslant \aleph_1$.*

Заметив, что $\psi(F, X) \leqslant (|F|\psi(X))^{\operatorname{ic}(X)}$ [2] и $|F| \leqslant s(F)^{bt(X)}$ [3б] для всякого замкнутого $F \subset X$, и положив в условиях предложения 1 $Y = X$ и $\tau = \psi(X)^{bt(X)\operatorname{ic}(X)}$, получаем известную теорему А. В. Архангельского о бикомпакте с первой аксиомой счетности [3a]. (Другое доказательство этой теоремы дано В. И. Пономаревым [1в], см. также [13б, 8, 7].)

* Теоремы 1 и 1$^{0'}$ справедливы и для p-пространств. Для линейно упорядоченных пространств неравенство $\bar{s}(X) \leqslant c(X)^+ = \bar{c}(X)^+$, которое легко следует из теоремы 1, было доказано в [12], а также в [13a, 9б]. Автору неизвестно, однако, верно ли утверждение теоремы 1 в классе всех T_3-пространств. Более слабое утверждение $\bar{s}(X) \leqslant 2^{\bar{c}(X)}$ справедливо для T_3- [11] и даже для T_2-пространств [14] (см. также [9a.]). Следствие 1 дает положительный ответ на задачу, которая ставилась как А. В. Архангельским, так и И. Юхасом.

Теорема 2°. $|X|\leqslant\psi(X)^{bl(X)\,\mathrm{ic}(X)}$ (2).

Утверждение 1. $sw(X)\leqslant\psi w(X)^{\nabla\,\mathrm{ic}(X)^*}\leqslant\psi w(X)^{\mathrm{ic}(X)}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ — псевдобаза в X. Положим $\tau=\nabla\mathrm{ic}(X)$ и $\mathscr{G}=\bigvee_{\tau}\mathscr{B}$. Нетрудно проверить, что $\mathscr{F}=\{X\setminus U\colon U\in\mathscr{G}\}$ — сеть в X.

Теорема 2. *Пусть $X-T_2$-пространство. Тогда* $|X|\leqslant 2^{\psi(X)t(X)\,\mathrm{ic}(X)}$.

Доказательство. Если $Z-T_2$-пространство, то $sw(Z)\leqslant\psi w(Z)^{\mathrm{ic}(Z)}\leqslant s(Z)^{t(Z)\,\mathrm{ic}(Z)}$ (см. (9a)) и, следовательно, $|Z|\leqslant s(Z)^{t(Z)\,\mathrm{ic}(Z)\psi(Z)}$. Таким образом, если $Z\subset X$ и $X-T_2$-пространство, то $\psi([Z],X)\leqslant s(Z)^{t(X)\,\mathrm{ic}(X)\psi(X)}$. Поэтому, положив в условиях предложения 1 $Y=X$ и $\tau=2^{t(X)\,\mathrm{ic}(X)\psi(X)}$, получаем $s(X)\leqslant\tau$ и $|X|\leqslant\tau$.

Следствие 2. *Мощность финально-компактного T_2-пространства со счетным псевдохарактером и счетной теснотой не превосходит* $2^{\aleph_0}$*.

Предложение 2. *Пусть $X-T_3$-пространство, $\mathscr{F}$ — π-сеть в $Y\subset X$ $s\pi\chi(F,X)\leqslant\tau$ для всех $F\in\mathscr{F}$ и $\nabla c(X)=\nu\leqslant m(\tau)$. Тогда существует $\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$ такое, что $|\mathscr{F}'|\leqslant\tau$ и $Y\subset[\cup\{F\colon F\in\mathscr{F}'\}]$.*

Доказательство. Пусть для всех $\alpha<\alpha'<\tau$ уже построены семейства $\mathscr{F}_\alpha\subset\mathscr{F}$ и $\mathscr{B}_\alpha$ такие, что: a) $|\mathscr{F}_\alpha|\leqslant\tau$; b) $|\mathscr{B}_\alpha|\leqslant\tau$; c) $\mathscr{B}_\alpha$—$s\pi$-база F в X для всех $F\in\mathscr{F}_\alpha$. Положим $\mathscr{G}_{\alpha'}=\cup\{\mathscr{B}_\alpha\colon\alpha<\alpha'\}$, $\mathscr{F}_{\alpha'}=\{F(U)\colon U\in V_{\nu^*}\mathscr{G}_{\alpha'},\ Y\setminus[U]\neq\Lambda\}$, где $F(U)\subset Y\setminus[U]$ и $F(U)\in\mathscr{F}$, $\mathscr{B}_{\alpha'}=\cup\{\mathscr{B}_F\colon F\in\mathscr{F}_{\alpha'}\}$, где $\mathscr{B}_F$—$s\pi$-база F в X такая, что $|\mathscr{B}_F|\leqslant\tau$. Легко видеть, что семейства $\mathscr{F}_{\alpha'}$ и $\mathscr{B}_{\alpha'}$ отвечают условиям a) — c). Таким образом, можно считать, построенными $\mathscr{F}'=\cup\{\mathscr{F}_\alpha\colon\alpha<\tau\}\subset\mathscr{F}$ и $A=\cup\{F\colon F\in\mathscr{F}'\}\subset Y$. По построению и в силу утверждения 1 A ν^*-c-симметрично Y относительно $\mathscr{G}=\cup\{\mathscr{G}_\alpha\colon\alpha<\tau\}$. Следовательно, по лемме 2 $Y\subset[A]$, и так как $|\mathscr{F}'|\leqslant\tau$, то доказательство завершено.

Теорема 3°. *Пусть $X-T_3$-пространство и $Y\subset X$. Тогда* $w([Y])\leqslant\pi\chi(Y|X)^{\nabla c(X)^*}\leqslant\pi\chi(Y|X)^{c(X)}\leqslant\chi(Y|X)^{c(X)}$.

Доказательство. Так как $\nabla c(X)$ — регулярный кардинал (5) (см. также (15)) и $s\pi\chi(x,X)=\pi\chi(x,X)$ для всех $x\in X$, то, положив в условиях предложения 2 $\mathscr{F}=\{\{y\}\colon y\in Y\}$, $\nabla c(X)=\nu$ и $\tau=\pi\chi(Y|X)^{\nu^*}$, получаем $s(Y)\leqslant\tau$. Ясно также, что существует $\mathscr{G}$—π-база y в X для всех $y\in Y$ такая, что $|\mathscr{G}|\leqslant s(Y)\cdot\pi\chi(Y|X)\leqslant\tau$. Положим $[Y]=F$ и $\mathscr{H}=\{F\cap[U]\colon U\in V_{\nu^*}\mathscr{G}\}$. Остается проверить, что $\mathscr{B}=\{F\setminus[F\setminus H]\colon H\in\mathscr{H}\}$ — база в Y.

Теорема 3. *Пусть $X-T_3$-пространство. Тогда* $w(X)\leqslant w_1(X)\leqslant\pi\chi(X)^{c(X)}$.

Следствие 3°. *Если $X-T_3$-пространство с условием Суслина, $Y\subset X$ и $\pi\chi(y,X)\leqslant 2^{\aleph_0}$ для всех $y\in Y$, то $w(Y)\leqslant 2^{\aleph_0}$.*

Следующая теорема приводится без доказательства.

Теорема 4. *Пусть $X-T_2$-пространство и $Y\subset X$. Тогда $\pi\chi(Y|X)\leqslant h(Y|X)t(Y)$ и, в частности, $\pi\chi(X)\leqslant h(X)t(X)$.*

Следствие 4. *Если X — бикомпакт, то $\pi\chi(X)\leqslant t(X)$ и, значит, $\pi w(X)\leqslant s(X)t(X)$. Так, наследственно сепарабельный бикомпакт обладает счетной π-базой.*

Из теорем 3°, 3 и теоремы 4 вытекают следующие утверждения.

Теорема 5°. *Пусть $X-T_2$-пространство и $Y\subset X$. Тогда $w(Y)\leqslant(h(Y|X)t(Y))^{c(X)}$ и если $[Y]=X$, то $w_1(X)\leqslant(h(Y|X)t(Y))^{c(X)}$.*

Теорема 5. *Пусть $X-T_3$-пространство. Тогда* $w(X)\leqslant w_1(X)\leqslant(h(X)t(X))^{c(X)}$.

Следствие 5. *Если X — бикомпакт, то* $w(X)\leqslant w_1(X)\leqslant t(X)^{c(X)}\leqslant\bar{c}(X)^{c(X)}$.

Из теорем 3° и 5° легко следует

Теорема 6. *Пусть $X-T_3$-пространство и $Y\subset X$. Тогда*: а) $|Y|\leqslant(2h(Y|X))^{c(X)bl(Y)}$; в) $|Y|\leqslant\pi\chi(Y|X)^{c(X)\psi(Y)}$.

Следствие 5. *Если X — бикомпакт, то $w(X)\leqslant w_1(X)\leqslant t(X)^{c(X)}\leqslant$ альное пространство $Y\subset X$ и $\psi(Y,X)\leqslant 2^{\aleph_0}$. Тогда $|Y|\leqslant 2^{\aleph_0}$.*

---

* Следствие 2 дает положительный ответ на вопрос А. В. Архангельского (см. Proc. III Prague Symp.).

В случае $Y=X$ следствие 6 дает результат А. В. Архангельского о мощности секвенциального бикомпакта ([3б]). Кроме того, неравенства теоремы 6 и при $Y=X$ уточняют в классе T_3-пространств оценки соответственно из ([3б]) и ([14, 7]).

Обозначим через LH и GLH соответственно гипотезу Лузина $(\mathrm{Ln}(2^{\aleph_0})=\aleph_1)$ и обобщенную гипотезу Лузина $(\mathrm{Ln}\,(2^\tau)=\tau^+$ для всех $\tau)$ *.

Если X — бикомпакт, то $X=[\{x\colon \chi(x,\ X)<\mathrm{Ln}(|X|)\}]$ (см. ([10])). Поэтому из теоремы 3° следует

Теорема 7 (GLH). *Пусть X — бикомпакт и $|X|\leqslant 2^\tau$. Тогда $w(X)\leqslant w_1(X)\leqslant\tau^{c(X)}$.*

Следствие 7 (GLH). 1). *Если X — бикомпакт с условием Суслина и $|X|\leqslant 2^{2^\tau}$, то $w(X)\leqslant w_1(X)\leqslant 2^\tau$.* 2) *Если X' — пространство с условием Суслина и $w(X')>2^\tau$, то $|bX'|>2^{2^\tau}$ для всякого хаусдорфова бикомпактного расширения bX'.*

Из лемм 2.1, 2.2 работы ([9в]) и теоремы 3 вытекает

Теорема 8 (LH). *Пусть X — нормальное пространство с условием Суслина и $\pi\chi(X)\leqslant 2^{\aleph_0}$. Тогда X — коллективно нормально.*

Рассуждая, как в ([9в]), и учитывая регулярность $\mathrm{Ln}\,(2^\lambda)$, получаем следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть X — нормальное пространство с измельчением. Тогда $w(X)<\mathrm{Ln}(2^{c(X)})$, и если $c(X)\leqslant\aleph_0$, то $w(X)<\mathrm{Ln}(2^{\aleph_0})\leqslant 2^{\aleph_0}$.*

Автор выражает глубокую благодарность акад. П. С. Александрову за внимание и поддержку. Автор признателен также В. И. Пономареву за интерес к этой работе.

Примечание при корректуре. Справедлива следующая

Теорема 10. *Пусть X — наследственно нормальный бикомпакт. Тогда $X=[\{x\in X\colon \pi\chi(x,X)\leqslant\aleph_0\}]$.*

Из теоремы 4 легко следует

Теорема 4′. *Пусть X — бикомпакт. Тогда $t(X)=\overline{\pi\chi}(X)$, где $\overline{\pi\chi}(X)=\sup\{\overline{\pi\chi}(x,\ X)\colon x\in X\}$ и $\overline{\pi\chi}(x,\ X)=\sup\{\pi\chi(x,\ Y)\colon x\in Y\subset X\}$.*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. С. Александров, П. С. Урысон,* Мемуар о компактных топологических пространствах, М., 1971. [2] *А. В. Архангельский, В. И. Пономарев,* Основы общей топологии в задачах и примерах, М., 1974. [3] *А. В. Архангельский,* а) ДАН, т. 187, № 5 (1969); б) ДАН, т. 192, № 2 (1971); в) ДАН, т. 199, № 6 (1971). [4] *В. И. Пономарев,* а) ДАН, т. 174, № 6 (1967); б) ДАН, т. 196, № 2 (1971). [5] *Б. А. Ефимов,* Тр. Московск. матем. общ., т. 23, 243 (1970). [6] *Г. П. Амирджанов, Б. Э. Шапировский,* ДАН, т. 214, № 2 (1974). [7] *А. А. Грызлов,* 3 Тирасп. симпоз. по общ. топ., тез. 29 (1973). [8] *Д. В. Чудновский,* 6 Топ. конфер. в Тбилиси, тез. 129 (1972). [9] *Б. Шапировский,* а) ДАН, т. 202, № 4 (1972); б) ДАН, т. 206, № 3 (1972); в) ДАН, т. 207, № 4 (1972). [10] *E. Čech, B. Pospišil,* Publ. Fac. Sci., Univ. Masaryk, v. 258, 1 (1938). [11] *J. de Groot,* Bull. Acad. Polon. Sci., v. 13 (1965). [12] *M. E. Rudin,* Am. Math. Monthly, v. 76 (1969). [13] *I. Juhasz,* a) Math. centre tracts, v. 34 (1971); б) Gen. Top. Appl., v. 2, № 1 (1972). [14] *A. Hajnal, I. Juhasz,* Proc. Koninkl. Nederl. Acad., Ser. A, v. 70, № 3 (1967). [15] *W. W. Comfort, Gen.* Top. Appl., v. 1, № 2 (1971).

---

* В ([9в]) вместо LH использовалось обозначение $\overline{\mathrm{CH}}$.