

С. Ц. АКОПЯН, В. П. ЖАРКОВ, В. М. ЛЮБИМОВ

**ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СФЕРОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ЗЕМЛИ. ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ**

(Представлено академиком М. А. Садовским 6 11 1974)

В работах (1, 2) была построена теория возмущений во втором приближении для крутильных и радиальных колебаний Земли. Ниже построена теория возмущений во втором приближении для сфероидальных колебаний Земли.

Компоненты вектора смещения $\mathcal{U} = (u, v, w)$ и возмущение гравитационного поля ψ при сфероидальных колебаниях имеют вид (3)

$$\begin{aligned} u &= U(r) S_n^m(\theta, \varphi), & v &= V(r) \frac{\partial S_n^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta}, \\ w &= \frac{V(r)}{\sin \theta} \frac{\partial S_n^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}, & \psi &= P(r) S_n^m(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

где S_n^m — сферическая гармоника порядка n .

Функции U, V, P удовлетворяют системе трех дифференциальных уравнений второго порядка и соответствующим граничным условиям (3). В случае однородной модели Земли задача на сфероидальные колебания имеет точное решение (4).

Используя выражение (42а) работы (5), легко показать, что

$$\int_0^1 \rho(x) (U_l U_j + \bar{N} V_l V_j) x^2 dx = I_l \delta_{lj}, \quad (2)$$

где δ_{lj} — символ Кронекера, l и j — номера обертонов, $\bar{N} = n(n+1)$.

Будем строить теорию возмущений для сфероидальных колебаний аналогично (1, 2). Зададим возмущения безразмерным функциям $\rho_0(x), \mu_0(x), K_0(x)$:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho_0(x) [1 + \varepsilon R(x)], & \mu(x) &= \mu_0(x) [1 + \varepsilon M(x)], \\ K(x) &= K_0(x) [1 + \varepsilon K_1(x)], \end{aligned} \quad (3)$$

тогда

$$g(x) = g_0(x) [1 + \varepsilon g_1(x)], \quad g_1(x) = \frac{D}{g_0 x^2} \int_0^x \rho_0 R x^2 dx. \quad (4)$$

Разложим частоту κ и функции U, V, P в ряды по ε :

$$\begin{aligned} \kappa_l &= \kappa_{0l} (1 + \varepsilon \kappa_{1l} + \varepsilon^2 \kappa_{2l} + \dots), & U_l &= U_{0l} + \varepsilon U_{1l} + \varepsilon^2 U_{2l} + \dots, \\ V_l &= V_{0l} + \varepsilon V_{1l} + \varepsilon^2 V_{2l} + \dots, & P_l &= P_{0l} + \varepsilon P_{1l} + \varepsilon^2 P_{2l} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим (3) — (5) в систему дифференциальных уравнений (7.49) — (7.51) работы (3) для сфероидальных колебаний и приравняем члены при

однократных степенях ε . Для краткости записи введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 X_i &= \dot{U}_i + \frac{2}{x} U_i - \frac{\bar{N}}{x} V_i, & Y_i &= 4x\dot{U}_i - 4U_i + \bar{N}(-U_i - xV_i + 3V_i), \\
 H_i &= \dot{V}_i - \frac{1}{x} V_i - \frac{1}{x} U_i, & \Pi_i &= 5U_i + 3x\dot{V}_i - V_i - 2\bar{N}V_i, \\
 \Phi_i &= \dot{P}_i - D\rho_0 U_i - \alpha D\rho_0 R U_{i-1}, \\
 T_i &= M_0 \dot{U}_i + \frac{1}{x} (K_0 - N_0 \mu_0) (2U_i - \bar{N}V_i) + \alpha \left[(K_0 K_1 + N_0 \mu_0 M) U_{i-1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{x} (K_0 K_1 - N_0 \mu_0 M) (2U_{i-1} - \bar{N}V_{i-1}) \right], \\
 S_i &= \mu_0 H_i + \alpha \mu_0 M H_{i-1}, \\
 L_{1i} &= \frac{d}{dx} [T_i] + \nu \rho_0 \Phi_i + \alpha \nu \rho_0 R \Phi_{i-1} + \frac{\nu}{x} g_0 \rho_0 (4U_i - \bar{N}V_i) + \\
 &\quad + \alpha \frac{\nu}{x} g_0 \rho_0 (R + g_1) (4U_{i-1} - \bar{N}V_{i-1}) + \beta \frac{\nu}{x} \rho_0 g_0 g_1 R (4U_{i-2} - \bar{N}V_{i-2}) + \\
 &\quad + N_1 \frac{\mu_0}{x^2} (Y_i + \alpha M Y_{i-1}) + \kappa_0^2 \rho_0 [U_i + \alpha (R + 2\kappa_1) U_{i-1} + \beta (\kappa_1^2 + 2\kappa_2 + 2\kappa_1 R) U_{i-2}], \\
 L_{2i} &= N_1 \frac{d}{dx} [S_i] + \frac{\nu}{x} \rho_0 (P_i + \alpha R P_{i-1}) - \frac{\nu}{x} g_0 \rho_0 (U_i + \alpha g_1 U_{i-1} + \\
 &\quad + \alpha R U_{i-1} + \beta R g_1 U_{i-2}) + \frac{1}{x} K_0 (X_i + \alpha K_1 X_{i-1}) - \frac{1}{x} N_0 \mu_0 (X_i + \alpha M X_{i-1}) + \\
 &\quad + \frac{1}{x^2} N_1 \mu_0 (\Pi_i + \alpha M \Pi_{i-1}) + \kappa_0^2 \rho_0 [V_i + \alpha (R + 2\kappa_1) V_{i-1} + \beta (\kappa_1^2 + 2\kappa_2 + 2\kappa_1 R) V_{i-2}], \\
 L_{3i} &= \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} [x^2 \Phi_i] - \frac{\bar{N}}{x^2} P_i + D\bar{N} \frac{\rho_0}{x} (V_i + \alpha R V_{i-1}); \tag{6}
 \end{aligned}$$

здесь i — индекс номера приближения, $i=0, 1, 2$, а индекс l — номера оборота опущен.

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } i=0, \\ 1 & \text{при } i=1, 2; \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 0 & \text{при } i=0, 1, \\ 1 & \text{при } i=2. \end{cases} \tag{7}$$

Тогда система уравнений для сфероидальных колебаний в соответствующих приближениях будет

$$L_{ki} = 0, \quad k=1, 2, 3; \quad i=0, 1, 2. \tag{8}$$

Все функции в системе (8) должны быть регулярны в нуле. Граничные условия на поверхности следующие:

$$T_i = 0, \quad S_i = 0, \quad \Phi_i + (n+1)P_i = 0 \quad \text{при } x=1. \tag{9}$$

Для получения формул первого приближения используем уравнения (8) для нулевого и первого приближения ($i=0, 1$).

Компоненты вектора, функции U_{il} , V_{il} и P_{il} разложим по собственным функциям нулевого приближения

$$U_{il} = \sum_k a_{lk} U_{0k}, \quad V_{il} = \sum_k a_{lk} V_{0k}, \quad P_{il} = \sum_k a_{lk} P_{0k}. \tag{10}$$

Умножим уравнения (8) ($i=0$) для обертона j на U_{1l} , V_{1l} и P_{1l} соответственно, а (8) ($i=1$) для обертона l на U_{0j} , V_{0j} и P_{0j} , попарно образуем их разности и проинтегрируем от 0 до 1. После интегрирования по частям с использованием граничных условий (9), подстановки (10) с учетом ортогональности (2) и суммирования всех полученных выражений получим равенство, из которого найдем:

при $l=j$

$$\begin{aligned} \kappa_{11} = & -\frac{1}{2\kappa_0^2 I} \int_0^1 dx \{ [\kappa_0^2 x^2 (U_0^2 + \bar{N} V_0^2) + 2x^2 v U_0 (\dot{P}_0 - D\rho_0 U_0) + \\ & + 2\bar{N} v x P_0 V_0 - 2\bar{N} v x g_0 U_0 V_0 + 4v x g_0 U_0^2] \rho_0 R + [4x v \rho_0 U_0^2 - 2\bar{N} v x \rho_0 U_0 V_0] g_0 g_1 - \\ & - [x \dot{U}_0 + 2U_0 - \bar{N} V_0]^2 K_0 K_1 + [N_1 \bar{N} (2 - \bar{N}) V_0^2 - {}^{4/3} N_1 (x \dot{U}_0 - U_0 + {}^{1/2} \bar{N} V_0)^2 - \\ & - N_1 \bar{N} (x \dot{V}_0 + U_0 - V_0)^2] \mu_0 M \}; \end{aligned} \quad (11)$$

при $l \neq j$

$$\begin{aligned} a_{ij} = & \frac{1}{(\kappa_{0j}^2 - \kappa_{0i}^2) I_j} \int_0^1 dx \{ [\kappa_{0i}^2 x^2 (U_{0i} U_{0j} + \bar{N} V_{0i} V_{0j}) + x^2 v U_{0i} (\dot{P}_{0j} - D\rho_0 U_{0j}) + \\ & + x^2 v U_{0j} (\dot{P}_{0i} - D\rho_0 U_{0i}) + \bar{N} v x (P_{0i} V_{0j} + P_{0j} V_{0i}) - \bar{N} v x g_0 (U_{0i} V_{0j} + U_{0j} V_{0i}) + \\ & + 4v x g_0 U_{0i} U_{0j}] \rho_0 R + [4x v \rho_0 U_{0i} U_{0j} - \bar{N} v x \rho_0 (U_{0i} V_{0j} + U_{0j} V_{0i})] g_0 g_1 - \\ & - (x \dot{U}_{0i} + 2U_{0i} - \bar{N} V_{0i}) (x \dot{U}_{0j} + 2U_{0j} - \bar{N} V_{0j}) K_0 K_1 + [N_1 \bar{N} (2 - \bar{N}) V_{0i} V_{0j} - \\ & - {}^{4/3} N_1 (x \dot{U}_{0i} - U_{0i} + {}^{1/2} \bar{N} V_{0i}) (x \dot{U}_{0j} - U_{0j} + {}^{1/2} \bar{N} V_{0j}) - \\ & - N_1 \bar{N} (x \dot{V}_{0i} + U_{0i} - V_{0i}) (x \dot{V}_{0j} + U_{0j} - V_{0j})] \mu_0 M \}. \end{aligned} \quad (12)$$

Коэффициент a_{il} оказывается неопределенным. Определим его так, чтобы условие нормировки (2) выполнялось с точностью до членов первого порядка. Тогда

$$a_{11} = -\frac{1}{2I_l} \int_0^1 x^2 dx \rho_0 R (U_{0l}^2 + \bar{N} V_{0l}^2). \quad (13)$$

Теория возмущений во втором приближении строится аналогичным образом. Раскладываем компоненты вектора, функции U_{2l} , V_{2l} и P_{2l} по функциям U_{0k} , V_{0k} и P_{0k} :

$$U_{2l} = \sum_k b_{lk} U_{0k}, \quad V_{2l} = \sum_k b_{lk} V_{0k}, \quad P_{2l} = \sum_k b_{lk} P_{0k}. \quad (14)$$

Проведя с уравнениями (8) ($i=0, 2$) те же преобразования, найдем равенство, из которого при $l=j$ определим изменение частоты во втором приближении:

$$\begin{aligned} \kappa_{2l} = & -\frac{1}{2} \kappa_{1l}^2 + 2\kappa_{1l} a_{1l} + \frac{1}{2\kappa_{0l}^2 I_l} \sum_k (\kappa_{0l}^2 - \kappa_{0k}^2) I_k a_{lk}^2 - \\ & - \frac{2vD}{\kappa_{0l}^2 I_l} \int_0^1 \rho_0 R U_{0l}^2 \frac{dx}{x} \int_0^{\infty} \rho_0 R x^2 dx + \frac{vD}{2\kappa_{0l}^2 I_l} \int_0^1 x^2 dx \rho_0^2 R^2 U_{0l}^2 + \\ & + \frac{v\bar{N}D}{\kappa_{0l}^2 I_l} \int_0^1 \rho_0 R V_{0l} U_{0l} \frac{dx}{x} \int_0^{\infty} \rho_0 R x^2 dx. \end{aligned} \quad (15)$$

При $l \neq j$ найдем все b_{lj} , исключая b_{ll} :

$$\begin{aligned}
 b_{lj} = & \frac{1}{(\kappa_{0j}^2 - \kappa_{0l}^2) I_j} \left\{ 2\kappa_{0l}^2 \kappa_{0l} \int_0^1 x^2 dx \rho_0 R (U_{0l} U_{0j} + \bar{N} V_{0l} V_{0j}) + \right. \\
 & + \sum_k (\kappa_{0k}^2 - \kappa_{0j}^2) I_k a_{lk} a_{jk} + 2a_{lj} I_j (\kappa_{0l}^2 \kappa_{0l} - \kappa_{0j}^2 \kappa_{0j}) + \\
 & + (\kappa_{0l}^2 - \kappa_{0j}^2) \sum_k a_{lk} \int_0^1 (U_{0j} U_{0k} + \bar{N} V_{0j} V_{0k}) x^2 dx \rho_0 R + \\
 & + 4\nu D \int_0^1 \rho_0 R U_{0j} U_{0l} \frac{dx}{x} \int_0^x \rho_0 R x^2 dx - \nu D \int_0^1 x^2 dx \rho_0^2 R^2 U_{0j} U_{0l} + \\
 & \left. + \bar{N} \nu D \int_0^1 \rho_0 R (V_{0l} U_{0j} + V_{0j} U_{0l}) \frac{dx}{x} \int_0^x \rho_0 R x^2 dx \right\}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Коэффициент b_{ll} определим из условия сохранения нормировки (2) с точностью до членов второго порядка:

$$b_{ll} = -\frac{1}{2I_l} \left\{ \sum_k a_{lk}^2 I_k + 2 \sum_k a_{lk} \int_0^1 \rho_0 R x^2 dx (U_{0l} U_{0k} + \bar{N} V_{0l} V_{0k}) \right\} \quad (17)$$

При выводе всех соотношений считалось, что R , M , K_1 принадлежат к тому же классу функций, что и ρ_0 , μ_0 , K_0 и использовалось (4). Чтобы избежать почленного дифференцирования рядов (10) и (14), мы везде освободились от производных путем предварительного интегрирования по частям. Формула (11) совпадает с формулой для добавки к частоте в первом приближении (6), а при $\bar{N}=0$ и $\dot{P}_0 - D\rho_0 U_0 = 0$ все формулы переходят в соответствующие формулы для радиальных колебаний (2). При этом оказывается, что при $\bar{N}=0$ нельзя разлагать P_1 и P_2 в ряд по функциям нулевого приближения, а следует использовать связь $\dot{P}_0 = D\rho_0 U_0$.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
30 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Ц. Аюбян, В. Н. Жарков, В. М. Любимов, ДАН, т. 204, № 3 (1972). ² С. Ц. Аюбян, В. Н. Жарков, В. М. Любимов, ДАН, т. 210, № 3 (1973). ³ В. Н. Жарков, В. Л. Паньков и др., Введение в физику Луны, гл. 7, «Наука», 1969. ⁴ В. Н. Жарков, Физика Земли, № 8 (1967). ⁵ В. Н. Жарков, В. М. Любимов, А. И. Оснач, Физика Земли, № 10 (1968). ⁶ В. Н. Жарков, В. М. Любимов, ДАН, т. 180, № 2 (1968).