

Н. С. БАХВАЛОВ

ОСРЕДНЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЛ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 2 IV 1974)

При исследовании ряда прикладных задач возникает необходимость расчета тепловых или иных полей в телах с периодической структурой (пример из ⁽¹⁾, периодически перфорированные пластинки и оболочки ⁽²⁾, полимеры ⁽³⁾, интегральные схемы, антенны, большой дом или город).

Искомое решение часто хорошо приближается суммой периодической составляющей и гладкой составляющей, удовлетворяющей уравнениям, соответствующим некоторым осредненным характеристикам среды. В ряде случаев коэффициенты таких уравнений получены в ⁽²⁾. В настоящей работе для линейного случая предполагается единообразный подход к выводу этих уравнений, основанный на идеях метода осреднения ⁽⁴⁾.

Изложение проводится в предположении, что искомые величины удовлетворяют системе уравнений второго порядка. Случай, когда область периодичности — некоторый параллелепипед в пространстве переменных $X = (x_1, \dots, x_m)$, сводится линейной заменой переменных к случаю, когда область периодичности — куб Ω_Δ со стороной Δ и осями, параллельными координатным.

В дальнейшем \mathcal{D}_i — оператор дифференцирования по переменной x_i , \mathcal{D} — по переменной t . Большими латинскими буквами обозначаем функции (матрицы, векторы), периодические по каждой из пространственных переменных x_1, \dots, x_m с периодом Δ , малыми латинскими буквами — функции, не зависящие от Δ .

Будем обозначать через $[A]$ среднее значение какой-либо функции A по периоду, а через \bar{A} — ее значение, соответствующее осредненным уравнениям.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} L\omega &= f, & (1) \\ L &= L_2 + L_1 + L_0, \quad L_2\omega = -\mathcal{D}_i(A_{ij}\mathcal{D}_j\omega), \\ L_1\omega &= \mathcal{D}_j(B_j\omega) + C_j\mathcal{D}_j\omega, \quad L_0\omega = Q\omega; \end{aligned}$$

ω, f — векторы-столбцы размерности n , A_{ij}, B_j, C_j, Q — матрицы размерности $n \times n$, суммирование по i, j в пределах $[1, n]$. В приложениях типичен случай разрывных коэффициентов. Поэтому равенство (1) понимается как обобщенное в смысле С. Л. Соболева:

$$\begin{aligned} \int ((A_{ij}\mathcal{D}_j\omega, \mathcal{D}_i\Phi) - (B_j\omega, \mathcal{D}_j\Phi) + (C_j\mathcal{D}_j\omega, \Phi) + \\ + (Q\omega, \Phi) - (f, \Phi)) dX = 0, \quad dX = dx_1 \dots dx_m, \end{aligned}$$

для любой финитной функции Φ из C_∞ .

Функцию ω^2 , удовлетворяющую приближенно уравнению (1), ищем в виде

$$\begin{aligned} \omega^2 &= v + \psi^1 + \psi^2, \quad \psi^1 = \Delta(N_0 v + N_j \mathcal{D}_j v), \\ \psi^2 &= \Delta^2(N_{00} v + N_{0j} \mathcal{D}_j v + N_{ij} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j v). \end{aligned}$$

Подставляя ω^2 в (1) и требуя совпадения членов порядка Δ^{-1} и 1 в правой и левой частях, получаем систему уравнений

$$\Delta L_2(N_0) + \mathcal{D}_j B_j = 0, \quad \Delta L_2(N_i) + \mathcal{D}_j(A_{ji}) = 0, \dots, \quad (2)$$

$$\bar{L}v = f, \quad \bar{L} = \bar{L}_2 + \bar{L}_1 + \bar{L}_0, \quad (3)$$

$$\bar{L}_2 v = \bar{A}_{ij} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j v, \quad \bar{L}_1 v = \bar{B}_j \mathcal{D}_j v,$$

$$\bar{L}_0 v = \bar{Q} v,$$

где

$$\bar{A}_{ij} = \bar{A}_{ji} = 1/2 ([\bar{A}_{ij}] + [\bar{A}_{ji}]), \quad \bar{A}_{ij} = A_{ij} + \Delta A_{iq} \mathcal{D}_q N_j,$$

$$\bar{B}_q = [\Delta A_{qj} \mathcal{D}_j N_0 + \Delta C_j \mathcal{D}_j N_q + B_q + C_q],$$

$$\bar{Q} = [Q + \Delta C_j \mathcal{D}_j N_0];$$

многоточием означены уравнения относительно матриц N_{ij} .

Пусть матрицы A_{ij} симметричные и $A_{ij} = A_{ji}$ при всех i, j , в некоторой подобласти Ω_Δ' все $A_{ij} = 0$, элементы матриц A_{ij} , B_j , C_j , Q равномерно ограничены.

$$0 < \alpha \leq \frac{\int_{\Omega_\Delta} (A_{ij} \mathcal{D}_j U, \mathcal{D}_i U) dX}{\int_{\Omega_\Delta \setminus \Omega_\Delta'} (\mathcal{D}_j U, \mathcal{D}_j U) dX} \leq \beta < \infty \quad (4)$$

при периодическом векторе U из C_∞ и знаменателе, отличном от нуля.

Теорема 1. *Тогда системы уравнений (2) разрешимы и все коэффициенты оператора \bar{L} конечны. При этом оператор \bar{L}_2 самосопряженный и сильно эллиптический.*

Условия теоремы, в частности, выполнены для системы уравнений теории упругости. Рассмотрим нестационарные задачи

$$S \mathcal{D} \omega + L \omega = f, \quad S > 0, \quad (5)$$

$$R \mathcal{D}^2 \omega + K \mathcal{D} \omega + L \omega = f, \quad R > 0, \quad f = f(t, X). \quad (6)$$

оператор L тот же, что и в (1), условия теоремы 1 выполнены. В случае (5) добавляем в Ψ^2 слагаемое $\Delta^2 N_{0,-1} \mathcal{D} v$, а в случае (6) — слагаемое $\Delta^2 (N_{0,-1} \mathcal{D} v + N_{-1,-1} \mathcal{D}^2 v)$. Можно показать, что соответствующие системы (2) разрешимы и осредненные системы (3) имеют вид

$$[S] \mathcal{D} v + \bar{L} v = f, \quad (7)$$

$$[R] \mathcal{D}^2 v + [K] \mathcal{D} v + \bar{L} v = f, \quad (8)$$

оператор \bar{L} тот же, что и в (3).

Приведем формулировки теорем, показывающие, что уравнения (3), (7), (8) имеют основания быть рассматриваемыми как правильные осредненные уравнения. В дальнейшем в формулировках теорем предполагается $\mu(\Omega_\Delta) = 0$; это соответствует отсутствию непроводящих прослоек в задачах распространения тепла и отсутствию пустот в задачах теории упругости; также предполагается $L_1 = 0$, $Q \geq 0$ и выполнены условия теоремы 1.

В дальнейшем Σ — область в пространстве переменных (x_1, \dots, x_m) , удовлетворяющая условию конуса, граница которой Γ состоит из конечного числа частей из некоторого класса Ляпунова $\mathcal{L}_1(c, \lambda)$. Пусть ω — решение (1) при граничных условиях $\omega|_\Gamma = g$, v — решение (3) при тех же граничных условиях.

Теорема 2. Пусть $n=1$, $m \leq 4$, $v \in W_q^4$, $q > 2m/(4-m)$. Тогда $\|\omega - v\|_c = 0(\Delta)$.

Теорема 3. Пусть $n=1$, $m \leq 3$, $f \in L_q$, $q > m/2$, $g \in C_\mu$, $\mu > 0$. Тогда $\|\omega - v\|_c \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$.

Для задач теории упругости требуется получение приближенного решения с малой погрешностью в производных.

Теорема 4. Пусть $v \in W_q^4$, $q > m$. Тогда $\|\omega - \omega^1\|_{W_2} = O(\sqrt{\Delta})$, где $\omega^1 = v + \psi^1$.

Теорема 5. Можно указать $p(\alpha, \beta) < \infty$ такое, что $\|\omega - \omega^1\|_{W_2} \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$, если $f \in L_p$, $v \in W_p^4$.

Рассмотрим нестационарный случай.

Теорема 5. Пусть v — решение (7) в области $[0, T] \times \Sigma$ при заданных значениях $v(0, X)$ и $v(t, X)|_\Gamma$, ω — решение (5) при тех же условиях. Если $v \in C_4$, то

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Sigma} ((\omega - \omega^1, \omega - \omega^1) + (\mathcal{D}_j(\omega - \omega^1), \mathcal{D}_j(\omega - \omega^1))) dX = O(\Delta).$$

Теорема 6. Пусть v — решение (8) в области $[0, T] \times \Sigma$ при заданных значениях $v(0, X)$, $\mathcal{D}v(0, X)$ и $v(t, X)|_\Gamma$. Пусть $\varphi(X)$ — решение уравнения $L\varphi = f(0, X)$ при граничных условиях $\varphi|_\Gamma = v(0, X)|_\Gamma$ и ω — решение (6) при начальных условиях $\omega(0, X) = \varphi(X)$, $\mathcal{D}\omega(0, X) = \mathcal{D}v(0, X)$, $\omega(t, X)|_\Gamma = v(t, X)|_\Gamma$.

Если $v \in C_4$, то

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Sigma} ((\mathcal{D}(\omega - \omega^1), \mathcal{D}(\omega - \omega^1)) + (\mathcal{D}_j(\omega - \omega^1), \mathcal{D}_j(\omega - \omega^1))) dX = O(\Delta).$$

Приведем пример осреднения граничных условий иного типа. Пусть в прямоугольнике $0 \leq x_1 \leq X_1$, $0 \leq x_2 \leq X_2$ решается краевая задача $L_2\omega = f$ при условиях $\omega|_{x_1=0} = g_1$, $A_{1j}\mathcal{D}_j\omega|_{x_1=X_1} = g_2$, на границах $x_2=0$ и $x_2=X_2$ задано условие контакта: нормальная составляющая вектора ω равна нулю и вектор $A_{2j}\mathcal{D}_j\omega$ направлен по нормали. Пусть v — решение уравнения $\bar{L}_2v = f$ при граничных условиях, получающихся из заданных заменой \bar{A}_{ij} на \bar{A}_{ij} .

Теорема 7. Если $v \in C_4$, то $\|\omega - \omega^1\|_{W_2} \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если положить $M_j = \Delta N_j + x_j E$, то имеем

$$\mathcal{D}_k\omega^1 = \mathcal{D}_k(v + \psi^1) \approx (\mathcal{D}_k M_j) \mathcal{D}_j v, \quad \bar{A}_{ij} = A_{iq} \mathcal{D}_q M_j.$$

Функциям M_j и последнему соотношению можно придать определенный физический смысл.

Автор выражает признательность В. Л. Бердичевскому за полезные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. В. Мухина, С. Л. Соболев, ПММ, т. 23, № 3, 534 (1959). ² Э. И. Григolloк, Л. А. Фильштинский, Перфорированные пластинки и оболочки, «Наука», 1970. ³ В. В. Бологин, Механика полимеров, т. 1, № 2, 27 (1965). ⁴ И. М. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1963.