Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 5

УДК 517.51:519.5

МАТЕМАТИКА

А. Д. ГАДЖИЕВ

ПРОБЛЕМА СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ И ТЕОРЕМЫ, АНАЛОГИЧНЫЕ ТЕОРЕМЕ П. П. КОРОВКИНА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 22 III 1974)

1. Пусть $C([a, b], x^2)$ есть пространство функций, определенных на всей оси, непрерывных на отрезке $[a, b]$, непрерывных справа в точке $x=b$, слева в точке $x=a$ и растущих на бесконечности не быстрее, чем x^2. Допустим также, что L_n, $n=1, 2, \ldots,$ — линейные положительные операторы, определенные на множестве $C([a, b], x^2)$.

Хорошо известна следующая теорема ([1]) (об ограничениях на рост функции см. ([2])).

Теорема П. П. Коровкина. *Если равномерно на отрезке* $[a, b]$ $L_n(t^k, x)\to x^k$, $k=0, 1, 2$, *то равномерно на этом отрезке* $L_n(f, x)\to f(x)$ *для любой функции* $f(x)\in C([a, b], x^2)$.

Нетрудно видеть, что функция $f(x)$ принадлежит к более узкому классу, чем класс функций, непрерывных на $[a, b]$, сходимость же последовательности $L_n(f, x)$ к $f(x)$ (равномерная на отрезке $[a, b]$) понимается именно в смысле сходимости в этом последнем классе. Чтобы выяснить, какое влияние оказывает рост функции $f(x)$ на сходимость последовательности операторов, попытаемся сформулировать теорему типа П. П. Коровкина в несколько иной форме.

2. Для каждой возрастающей функции $\varphi(x)\in C_{(-\infty, \infty)}$ обозначим через C_ρ пространство функций $f(x)$, определенных (и непрерывных) на всей оси и удовлетворяющих условию $|f(x)|\leqslant M_f[\varphi^2(x)+1]=M_f\rho(x)$. Легко видеть, что, полагая $\|f\|_\rho=\sup\limits_x \dfrac{1}{\rho(x)}|f(x)|$, мы превратим C_ρ в линейное нормированное пространство. Сходимость в C_ρ определим как обычно: $f_n(x)\to f(x)$ в C_ρ, если $\|f_n-f\|_\rho\to 0$.

Очевидно, что для сходимости $f_n(x)$ к нулю в C_ρ необходимо и достаточно, чтобы $|f_n(x)|\leqslant \varepsilon_n\rho(x)$, где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Мы будем иметь дело с линейными положительными операторами (л.п.о.), действующими из C_ρ в C_ρ. Нетрудно показать, что такой оператор непрерывен (ограничен). Кроме того, для того чтобы л.п.о. $\mathscr{L}$, определенный на множестве всех $f\in C_\rho$, действовал из C_ρ в C_ρ, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{L}(f, x)\in C_{(-\infty, \infty)}$ $\forall f\in C_\rho$ и $\mathscr{L}(\rho, x)\leqslant M\rho(x)$.

Проблема сходимости в C_ρ. Пусть последовательность л.п.о. $\mathscr{L}_n(C_\rho\to C_\rho)$ удовлетворяет трем условиям

$$\|\mathscr{L}_n(\varphi^k(t), x)-\varphi^k(x)\|_\rho\to 0, \quad k=0, 1, 2; \quad n\to\infty. \tag{1}$$

Можно ли утверждать тогда, что для любой $f\in C_\rho$

$$\|\mathscr{L}_n(f, x)-f(x)\|_\rho\to 0? \tag{2}$$

Утвердительный ответ представлял бы собой теорему типа П. П. Коровкина в C_ρ. Однако, как мы сейчас покажем, для любой функции $\rho(x)$

$(\rho(x)=1+\varphi^2(x),\ \varphi\in C_{(-\infty,\infty)},\ \varphi\uparrow\infty)$ существует последовательность л.п.о. из C_ρ в C_ρ, удовлетворяющих условиям (1), и существует функция из C_ρ, на которой эти операторы не удовлетворяют соотношению (2).

Положим, не уменьшая общности, что $\varphi(0)=0$ и введем обозначение

$$l(x;\varphi,f)=\frac{\varphi^2(x)}{\varphi^2(x+1)}f(x+1)-2f(x)+\frac{\varphi^2(x)}{\varphi^2(x+2)}f(x+2).$$

Определим последовательность операторов, действующих на функциях $f\in C_\rho$, по формулам

$$\mathscr{L}_n(f,x)=f(x)+\frac{\rho(x)}{4\rho(n)}l(x;\varphi,f),\quad \text{если}\quad 0\leqslant x\leqslant n;$$

$$\mathscr{L}_n(f,x)=f(x)+\frac{1}{4}l(x;\varphi,f),\quad \text{если}\quad x\geqslant n,$$

$$\mathscr{L}_n(f,x)=f(x)-\frac{1}{2\rho(n)}f(x),\quad \text{если}\quad x\leqslant 0.$$

Нетрудно проверить, что операторы $\mathscr{L}_n$ обладают всеми требуемыми свойствами, но для функции $f^*(x)=\varphi^2(x)\cos\pi x$, принадлежащей C_ρ,

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathscr{L}_n(f^*,x)-f^*(x)\|_\rho\geqslant 1.$$

Отрицательный ответ на проблему сходимости приводит к необходимости установления некоторых аналогов теоремы П. П. Коровкина, на которых мы и остановимся.

Теорема 1. *Если для последовательности л.п.о.* $L_n(C_\rho\to C_\rho)$ *выполнены условия* (1), *то* $\|L_n(f,\ x)-f(x)\|_\rho\to 0$, $n\to\infty$, *для любой функции* $f\in C_\rho$, *для которой существует конечный предел* $\lim\limits_{\pm x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\rho(x)}=K_f$.

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

3. Следующие результаты также справедливы для л.п.о., действующих в C_ρ, однако для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением более подробно частного случая, когда элементами C_ρ являются комплексные числовые последовательности $\{a_k\}$ такие, что $|a_k|\leqslant M\rho(k)$, $k=0,1,2,\ldots$ Вместо C_ρ мы в этом случае будем писать $\mathfrak{R}_\rho$. Кроме того, мы не будем прибегать к функциям $\varphi(x)$, считая с самого начала, что $\rho(x)$ возрастает при $x\geqslant 0$, $\rho(0)=1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\rho(x)=+\infty$. Для удобства будем пользоваться векторным обозначением, полагая $\mathbf{a}=\{a_k\}$. Всюду в дальнейшем мы полагаем $\boldsymbol{\rho}=\{\rho(k)\}$, $\sqrt{\boldsymbol{\rho}}=\{\sqrt{\rho(k)}\}$, $\mathbf{1}=\{1\}$. Отметим также, что мы будем писать $\mathbf{a}\ll\mathbf{b}$, если $\sup\limits_k\dfrac{|a_k|}{|b_k|}\leqslant N<+\infty$.

Очевидно, что условие $\mathbf{a}\in\mathfrak{R}_\rho$ равносильно условию $\mathbf{a}\ll\boldsymbol{\rho}$ и, если $\boldsymbol{\rho}_1\ll\boldsymbol{\rho}_2$, то $\mathfrak{R}_{\rho_1}\subset\mathfrak{R}_{\rho_2}$. В дальнейшем будем считать, что $\boldsymbol{\rho}_1\ll\boldsymbol{\rho}_2$. Результат применения оператора A к вектору $\mathbf{a}=\{a_m\}$ мы будем обозначать, как обычно, символом $A\mathbf{a}$, а k-ю компоненту вектора $A\mathbf{a}$ — через $(A\mathbf{a})_k$, или $(A\{a_m\})_k$. Обозначим еще через $\mathfrak{R}_\rho^+$ множество векторов $\mathbf{a}\in\mathfrak{R}_\rho$, все координаты которых неотрицательны.

Определение. Линейный оператор $A(\mathfrak{R}_{\rho_1}\to\mathfrak{R}_{\rho_2})$ назовем положительным, если $A\mathfrak{R}_{\rho_1}^+\subset\mathfrak{R}_{\rho_2}^+$.

Теорема 2. *Если для последовательности л.п.о.* $A_n(\mathfrak{R}_{\rho_1}\to\mathfrak{R}_{\rho_2})$ *выполнены три условия* *

$$\|A_n\mathbf{1}-\mathbf{1}\|_{\rho_2}\to 0,\quad \|A_n\sqrt{\boldsymbol{\rho}_1}-\sqrt{\boldsymbol{\rho}_1}\|_{\rho_2}\to 0,\quad \|A_n\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_1\|_{\rho_2}\to 0. \qquad (3)$$

* Если $\rho_1(k)=1+r(k)$, то в (3) можно взять $\mathbf{1}$, $\sqrt{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{r}$.

то $A_n\mathbf{a}\to\mathbf{a}\in\mathfrak{R}_{\rho_1}$ *в любом пространстве* $\mathfrak{R}_R$, *если только*

$$\mathbf{R}=\{R(k)\},\quad \lim_{k\to+\infty}\frac{\rho_2(k)}{R(k)}=0.$$

Мы дадим лишь общую схему доказательств этой теоремы и двух основных лемм.

Лемма 1. *В условиях теоремы 2 существует пространство* $\mathfrak{R}_q\supset\mathfrak{R}_{\rho_2}$ *такое, что для любого* $\mathbf{a}\in\mathfrak{R}_{\rho_1}$

$$\|A_n\mathbf{a}-\mathbf{a}\|_q\to 0,\quad n\to\infty.$$

Доказательство. Так как $\rho_1(k)$ возрастает, то для любого $\mathbf{a}\in\mathfrak{R}_{\rho_1}$ при любых m и k

$$|a_m-a_k|\leqslant 16M\frac{\rho_1(k)}{\Delta_{\rho_1}^2(k)}\left(\sqrt{\rho_1(m)}-\sqrt{\rho_1(k)}\right)^2, \tag{4}$$

где $\Delta_{\rho_1}(k)=\min\{\sqrt{\rho_1(k)}-\sqrt{\rho_1(k-1)};\ \sqrt{\rho_1(k+1)}-\sqrt{\rho_1(k)}\}$.

Используя критерий сходимости последовательности в $\mathfrak{R}_\rho$ (см. п.2), из условий (3) можно вывести неравенство

$$\left(A_n\{(\sqrt{\rho_1(m)}-\sqrt{\rho_1(k)})^2\}\right)_k\leqslant 4\varepsilon_n\rho_2(k)\rho_1(k). \tag{5}$$

Следовательно, в силу (4), (5) и (1)

$$|(A_na)_k-a_k|\leqslant 64M\varepsilon_n\rho_2(k)\rho_1^2(k)\frac{1}{\Delta_{\rho_1}^2(k)}.$$

Остается положить $q(k)=\rho_2(k)\rho_1^2(k)\dfrac{1}{\Delta_{\rho_1}^2(k)}$, $\quad\mathbf{q}=\{q(k)\}$ и заметить, что $\rho_2\ll\mathbf{q}$.

Лемма 2. *Пусть* W_n — *линейные операторы из* $\mathfrak{R}_{\rho_1}$ *в* $\mathfrak{R}_{\rho_2}$, *нормы которых равномерно ограничены. Тогда: или для любого* $\mathbf{R}$, $\rho_2\ll\mathbf{R}$ *имеем* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|W_n\|_{\rho_1\to R}>0$, *или* $\lim\limits_{n\to\infty}\|W_n\|_{\rho_1\to R}=0$ *для любого* $\mathbf{R}$ *такого, что* $\lim\limits_{k\to+\infty}[\rho_2(k)/R(k)]=0$.

Доказательство. Полагая

$$\sup_{\|\mathbf{a}\|_{\rho_1}=1}\ \sup_{k\leqslant s}\frac{|(W_n\mathbf{a})_k|}{\rho_2(k)}=\varphi_n(s),$$

замечаем, что или $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\varphi_n(s)>0$ для какого-то фиксированного s, или $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(s)=0$ для любого фиксированного s.

После этого лемма немедленно следует из неравенств

$$\varphi_n(s)\inf_{k\leqslant s}\frac{\rho_2(k)}{R(k)}\leqslant\|W_n\|_{\rho_1\to R}\leqslant\varphi_n(s)+\|W_n\|_{\rho_1\to\rho_2}\sup_{k>s}\frac{\rho_2(k)}{R(k)}.$$

Доказательство теоремы 2. Если E — единичный оператор, то

$$\|A_n\mathbf{a}-\mathbf{a}\|_R=\|(A_n-E)\mathbf{a}\|_R\leqslant\|A_n-E\|_{\rho_1\to R}\|\mathbf{a}\|_R.$$

В условиях теоремы нормы операторов A_n-E равномерно ограничены, а в силу лемм 1 и 2 $\|A_n-E\|_{\rho_1\to R}\to 0$.

4. Заметим, что непосредственные применения к известным операторам, например, С. Н. Бернштейна — Хлодовского, Г. М. Миракьяна и др., дают новые результаты для них. Кроме того, нетрудно, как и в ([2]), дать общую конструкцию операторов в C_ρ, удовлетворяющих условиям (1). Укажем еще одно приложение полученных в п.3 результатов.

Пусть $\mathfrak{A}$ — пространство регулярных в $|z|<1$ функций, а $\mathfrak{A}^+$ — множество всех $f\in\mathfrak{A}$, тейлоровские коэффициенты которых неотрицательны. Линейный оператор $B(\mathfrak{A}\to\mathfrak{A})$ назовем k-положительным, если $B\mathfrak{A}^+\subset\mathfrak{A}^+$.

Теорема 3. *Для того чтобы последовательность линейных k-положительных операторов* $B_n(\mathfrak{A}\to\mathfrak{A})$ *обладала свойством* $B_nf(z)\xrightarrow{(\text{в }\mathfrak{A})}f(z)$, *для* $\forall f\in\mathfrak{A}$, *с тейлоровскими коэффициентами из* $\mathfrak{R}_{1+k^2}$, *необходимо и достаточно выполнение трех условий*

$$B_n\left(\frac{1}{1-z}\right)^m\xrightarrow{(\text{в}\mathfrak{A})}\left(\frac{1}{1-z}\right)^m,\qquad m=1,2,3;\quad n\to\infty.$$

Справедливы и более общие утверждения о сходимости операторов в классе функций $f\in\mathfrak{A}$ с коэффициентами из $\mathfrak{R}_\rho$. Кроме того, нами установлены аналоги общих теорем П. П. Коровкина (см. ([1]), стр. 45—53) для линейных k-положительных операторов.

В заключение, пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность М. А. Евграфову за ценные советы и обсуждения.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
9 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. П. Коровкин,* Линейные операторы и теория приближений, М., 1959.
[2] *В. А. Баскаков,* Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций (сборн. статей), М., 1961.