Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 2

УДК 517.948 *МАТЕМАТИКА*

Ю. П. БОГЛАЕВ

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 4 III 1974)

В настоящей заметке рассматривается новый класс сингулярно возмущенных задач. Наиболее изученными являются задачи, в которых возмущающий оператор является дифференциальным ([1], [2]). Мы рассмотрим в качестве возмущающего интегральный оператор. Сингулярность возмущения связана с тем, что невозмущенное уравнение не имеет решений, принадлежащих области определения возмущенного оператора.

1°. Постановка задачи. Системы с «быстрыми» переменными. Рассмотрим систему интегральных уравнений Вольтерра

$$u(t)=\int_0^t [K(t,s)+\varepsilon H(t,s)]u(s)\,ds+f(t), \tag{1}$$

где K, H — матрицы $p\times p$, u, f — векторы, ε — малый положительный параметр. Система (1) рассматривается в пространстве $C[0, T]$ непрерывных вектор-функций с нормой

$$\|\cdot\|=\max_{0\leqslant t\leqslant T,\ 1\leqslant i\leqslant p}|u_i(t)|.$$

Условие А. 1) Пусть матрица H имеет представление $H(t, s)=P(t, s)Q^{-1}(t, s)$. Функции K, P, Q, f непрерывны в области $\Omega=\{t, s\,|\,0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$.

2) В области Ω существует единственное решение уравнения $\det Q(t, s)=0$, а именно $t=s=0$, $P(0, 0)\neq 0$.

3) Функции P, Q аналитичны в начале координат. Тогда уравнение (1) в области $\Omega_\delta=\{t, s\,|\,0\leqslant s\leqslant t\leqslant\delta\}$ для малых δ можно привести к виду

$$u(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)\,ds+\varepsilon\int_0^t \frac{1}{t^k\sum\limits_{i=0}^{n} s^i h_i(t)}R(t,s)u(s)\,ds+f(t), \tag{2}$$

где $R(t, s)$ — матричная, $h_i(t)$ — скалярные аналитические функции в Ω_δ; $k+n\geqslant 1$, $h_n(t)\equiv 1$, $h_0(t)\neq 0$, $h_i(0)=0$, $i=0, 1, \ldots, n-1$, $R(0, 0)\neq 0$.

Обозначим

$$\operatorname{ord} h_i(t)\,|_{t\to 0}=r_i,\qquad \min_{0\leqslant i\leqslant n}(r_i+i)=r_l+l.$$

4) Предположим, что $l=0$, $m=k+r_0\geqslant 2$. Легко видеть, что в Ω_δ имеет место

$$H(t,s)=\frac{1}{t^m}\left[\frac{1}{\gamma}R(0,0)+O(t)\right],\quad t\to 0, \tag{3}$$

где γ определяется из соотношения $h_0(t)=\gamma t^{r_0}+o(t^{r_0})$, $t\to 0$. Заметим, что ядро $H(t, s)$ в силу (3) имеет неинтегрируемую особенность в нуле, следовательно, возмущающий оператор $\int_0^t H(t, s)u(s)\,ds$ неограничен в $C[0, T]$. Поскольку мы будем искать решение в $C[0, T]$, то из (2), (3) вытекает: область определения возмущающего оператора есть

$$\{u(t)\in C[0, T],\ \operatorname{ord} u(t)\,|_{t\to 0}\geqslant m-1\}. \tag{4}$$

Невозмущенное уравнение

$$u(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)\,ds+f(t) \tag{5}$$

имеет решение, вообще говоря, не принадлежащие (4). Это приводит к явлению пограничного слоя в решении (1), характерного для сингулярно возмущенных задач.

Система уравнений (1) называется системой с «быстрыми» переменными по терминологии [1], так как в нулевом приближении все переменные u_i имеют погранслойные поправки.

Произведем в возмущающем операторе замену:

$$\mu=\varepsilon^{1/(m-1)},\quad \tau=t/\mu,\quad \xi=s/\mu. \tag{6}$$

Оператор $\varepsilon\int_0^0 H(t,s)u(s)\,ds$ можно, учитывая (6), привести к виду $(1/\tau^m)\int_0^\tau L(\tau, \xi, \mu)u(\mu\xi)\,d\xi$, где $L(\tau, \xi, \mu)$ — матричная аналитическая функция в области $0\leqslant\xi\leqslant\tau\leqslant\delta/\mu$, $0\leqslant\mu\leqslant\mu_0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* А1) — 4). *Пусть матрица* $L(0, 0, 0)$ *имеет собственные значения* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $\lambda_i\neq\lambda_j$, $i\neq j$, $\operatorname{Re}\lambda_i<0$, $i=1, 2, \ldots, p$.

Тогда для достаточно малых μ *существует единственное решение* (1) *в* $C[0, T]$. *Оно представимо в виде*

$$u(t, \mu(\varepsilon))=\bar{u}(t, \mu)+\Pi(\tau, \mu) \tag{7}$$

и имеют место оценки

$$\|\bar{u}(t,\mu)-\varphi(t)\|<\begin{cases} c\mu\ln\mu, & m=2,\\ c\mu, & m>2;\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant T; \tag{8}$$

$$\|\Pi(\tau, \mu)\|<c,\ 0\leqslant\tau\leqslant\tau_1,\quad \|\Pi(\tau, \mu)\|<c/\tau^{m-1},\ \tau_1\leqslant\tau<\infty, \tag{9}$$

где $\varphi(t)$ — *решение* (5), τ_1 — *достаточно большое фиксированное число*. c — *не зависящая от* μ *константа*.

Заметим, что из (8) следует равномерный предельный переход решения (1) к вырожденному (невозмущенному) $\varphi(t)$ вне пограничного слоя, ширину которого можно определить, например, следующим образом $0\leqslant t\leqslant c\mu\ln\mu$. При этом функция $\bar{u}(t, \mu)$ не удовлетворяет (4), а $\Pi(\tau, \mu)$ исправляет $\bar{u}(t, \mu)$ так, что сумма (7) лежит в области (4).

При доказательстве теоремы 1 используется представление (1) в виде системы

$$\begin{gathered}\bar{u}(t)=\int_0^t K(t,s)\bar{u}(s)\,ds+f(t)+\int_0^t K(t,s)\Pi\left(\frac{s}{\mu}\right)ds,\\ \Pi(\tau)=\frac{1}{\tau^m}\int_0^\tau L(\tau,\xi,\mu)\left[\bar{u}(\mu\xi)+\Pi(\xi)\right]d\xi.\end{gathered} \tag{10}$$

Второе уравнение (10) естественно назвать погранслойным.

2°. Системa с «быстрыми» и «медленными» переменными. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$u(t)=\int_0^t K_{11}(t,s)u(s)\,ds+\int_0^t K_{12}(t,s)v(s)\,ds+\mu^{m-1}\int_0^t H(t,s)u(s)\,ds+f_1(t),$$
$$v(t)=\int_0^t K_{21}(t,s)u(s)\,ds+\int_0^t K_{22}(t,s)v(s)\,ds+f_2(t). \qquad (11)$$

В (11) матрицы $K_{ij}(t, s)$, $H(t, s)$ имеют размеры, соответствующие векторам u, v, и удовлетворяют A1) – 4), u, f_1 – p-векторы, v, f_2 – q-векторы. Предположим, что невозмущенное уравнение ($\mu=0$), соответствующее (11), имеет решение $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для достаточно малых* μ *существует единственное решение* (11) *в* $C[0, T]$ *и имеет место равномерный предельный переход*

$$\lim_{\mu\to 0} u(t,\mu)=\varphi(t),\quad c\mu\ln\mu\leqslant t\leqslant T,$$
$$\lim_{\mu\to 0} v(t,\mu)=\psi(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \qquad (12)$$

Переменные $v(t)$, в силу (12), называются «медленными», они равномерно близки к соответствующему вырожденному решению на всем интервале $[0, T]$.

В заключение отметим, что рассмотренный возмущающий интегральный оператор дает качественно такое же явление пограничного слоя, как и дифференциальный, например, в задаче Коши ([3]). Для приложений представляет интерес построение асимптотики произвольного порядка для решений (1), (11). Однако детальное обсуждение этого вопроса выходит за рамки настоящей работы.

Институт физики твердого тела
Академии наук СССР
Черноголовка Московской обл.

Поступило
10 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Ф. Бутузов, А. Б. Васильева, М. В. Федорюк,* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Сборн. Итоги науки. Математический анализ, М., 1967. [2] *С. А. Ломов,* ДАН, т. 212, № 1 (1973). [3] *А. Н. Тихонов,* Матем. сборн., т. 31 (73), № 3 (1952).