Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 6

УДК 513.83 МАТЕМАТИКА

В. М. УЛЬЯНОВ

БИКОМПАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ С ПЕРВОЙ АКСИОМОЙ СЧЁТНОСТИ, НЕ ПОВЫШАЮЩИЕ ВЕСА И РАЗМЕРНОСТИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 5 II 1974)

Все пространства будут предполагаться вполне регулярными.

Положим $Lb(X)=\{x\in X$: существует такая окрестность $Ux\subseteq X$, что $[Ux]_X$ — *бикомпакт*$\}$.

Теорема 1. *Пусть пространство* X *имеет* $\chi(X)\leqslant\aleph_0$, $w(X)\leqslant\tau$ (*и* $\operatorname{loc}\dim Lb(X)\leqslant n$). *Оно тогда и только тогда имеет бикомпактное расширение* vX *с первой аксиомой счетности веса* $\leqslant\tau$ (*и размерности* $\dim vX\leqslant n$), *когда существуют бикомпакт* Y *с первой аксиомой счетности веса* $\leqslant\tau$ (*и* $\dim Y\leqslant n$) *и непрерывное финально-компактное * отображение* $f\colon X\xrightarrow{\text{в}} Y$, *удовлетворяющее условию* (*): *для каждой точки* $x\in X\setminus Lb(X)$ *семейство* $\{f^{-1}Ufx\setminus F$: $Ufx\subseteq Y$ — *окрестность точки* fx, $F\subseteq X\setminus\{x\}$ — *бикомпакт*$\}$ *является базой в точке* $x\in X$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Точно так же, как в доказательстве теоремы 1 работы [1], строится бикомпакт $Z=Lb(X)\dot\cup Y$ с первой аксиомой счетности, содержащий в качестве подпространств пространства X и Y. Базу топологии в нем образуют всевозможные открытые множества $U\subseteq Lb(X)$ и множества вида $V(W, F)=(f^{-1}W\cup W)\setminus F$, где $W\subseteq Y$ открыто, $F\subseteq Lb(X)$ бикомпактно.

Докажем, что $w(Z)\leqslant\tau$. Это неравенство следует из того, что если B_1 — база в $Lb(X)$, состоящая из элементов с бикомпактными замыканиями в $Lb(X)$ (такая база существует, так как $Lb(X)$ открыто в X в силу леммы 1 работы [1]), а B_2 — база в Y, то множества вида $(f^{-1}U\cup U)\setminus F$, где $U\in B_2$, а $F\subseteq Lb(X)$ — замыкание объединения конечного числа элементов базы B_1, и множества $U\in B_1$ образуют базу в Z.

Если $\operatorname{loc}\dim Lb(X)\leqslant n$ и $\dim Y\leqslant n$, то для пространства Z имеем $rd_Z(Z\setminus Y)=\operatorname{loc}\dim Lb(X)\leqslant n$, а потому в силу теоремы Даукера (см. [2], стр. 270—271, теорема 15) $\dim Z\leqslant n$.

В качестве искомого расширения можно взять $vX=[X]_Z$.

Теорема 1 доказана.

Пусть $\aleph_0\leqslant\tau\leqslant2^{\aleph_0}$. Через N_τ будем обозначать дискретное пространство мощности τ. В силу теоремы 1 пространство N_τ имеет бикомпактное расширение $\overline{N}_\tau$ с первой аксиомой счетности веса τ и размерности 0. Для доказательства достаточно заметить, что существует взаимно однозначное отображение $f\colon N_\tau\to fN_\tau\subseteq D^{\aleph_0}$, где D — дискретное двоеточие.

Определения частичных произведений $X_\alpha=P(X_0, Z_\alpha, {}_\alpha O_0)$ основания X_0 на слой Z_α относительно открытого множества ${}_\alpha O_0\subseteq X_0$ и $X_{\mathfrak{A}}=P(X_0, \{Z_\alpha\}, \{{}_\alpha O_0\}, \alpha\in\mathfrak{A})$ основания X_0 на систему слоев Z_α относительно системы открытых множеств ${}_\alpha O_0\subseteq X_0$ даны в работе [3], стр. 154—155, 173. По определению $P(X_0, Z, \{{}_\alpha O_0\}, \alpha\in\mathfrak{A})=P(X_0, \{Z_\alpha\}, \{{}_\alpha O_0\}, \alpha\in\mathfrak{A})$, где $Z_\alpha=Z$ для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$.

Очевидно, что $\chi(X_\alpha)\leqslant\max(\chi(X_0), \chi(Z_\alpha))$, а так как $X_{\mathfrak{A}}\subseteq\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}X_\alpha$ (см. [3], стр. 174, свойство (3)), то имеем $\chi(X_{\mathfrak{A}})\leqslant\max(\chi(X_0), \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}}\chi(Z_\alpha), |\mathfrak{A}|)$.

* Отображение $f\colon X\to Y$ называется финально-компактным, если для каждого $y\in fX$ множество $f^{-1}y$ финально-компактно.

Теорема 2. а) *Для каждого бесконечного кардинального числа $\tau\leqslant 2^{\aleph_0}$ существует бикомпакт $\overline{R}^\tau$ с первой аксиомой счетности веса τ, содержащий в качестве подпространства любое метризуемое пространство веса $\leqslant\tau$.*

б) *Для каждого бесконечного кардинального числа $\tau\leqslant 2^{\aleph_0}$ и каждого целого числа $n\geqslant 0$ существует совершенно n-мерный бикомпакт $\overline{R}^{n\tau}$ с первой аксиомой счетности веса τ, содержащий в качестве подпространства любое метризуемое пространство X веса $\leqslant\tau$ и размерности $\dim X\leqslant n$.*

Доказательство. а) Как доказано в работе [3] (теорема 8.1, стр. 206), пространство $R^\tau=P(I^\infty, N_\tau, \{_kO\}, k\in N)$, где I^∞ — гильбертов кирпич, а система $\{_kO: k\in N\}$ — база в I^∞, является метризуемым пространством веса τ, универсальным для всех метризуемых пространств веса $\leqslant\tau$.

Рассмотрим пространство $\overline{R}^\tau=P(I^\infty, \overline{N}_\tau, \{_kO\}, k\in N)$. Из свойства (4), стр. 178, свойства (12), стр. 175, и следствия 5.2, стр. 188 работы [3], следует, что $\overline{R}^\tau$ есть бикомпакт веса τ и что $R^\tau\subset\overline{R}^\tau$. Кроме того, $\chi(\overline{R}^\tau)\leqslant\aleph_0$. Поэтому все доказано.

б) В силу теоремы 8.2, стр. 207 работы [3], пространство $R^{n\tau}=P(I^n, N_\tau, \{_kO\}, k\in N)$, где I^n — n-мерный куб, а система $\{_kO: k\in N\}$ — база в I^n, является метризуемым n-мерным в любом смысле пространством веса τ, универсальным для всех метризуемых пространств X веса $\leqslant\tau$ и $\dim X\leqslant n$.

Аналогично рассмотрим пространство $\overline{R}^{n\tau}=P(I^n, \overline{N}_\tau, \{_kO\}, k\in N)$. Из тех же соображений следует, что $\overline{R}^{n\tau}$ есть бикомпакт с первой аксиомой счетности веса τ и что $R^{n\tau}\subseteq\overline{R}^{n\tau}$. Кроме того, так как куб I^n является совершенно n-мерным (см. [4], стр. 111, теорема 2), в силу теоремы 11.3, стр. 227 работы [3], бикомпакт $\overline{R}^{n\tau}$ является совершенно n-мерным.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, множество $X\diagdown Lb(X)$ метризуемо, $\chi(X)\leqslant\aleph_0$, $w(X)=\tau\leqslant 2^{\aleph_0}$ (и $\dim X\leqslant n$).*

Тогда существует такое бикомпактное расширение vX пространства X, что $\chi(vX)\leqslant\aleph_0$, $w(vX)=\tau$ (и $\dim vX\leqslant n$).

Доказательство. Будем предполагать, что $\tau\geqslant\aleph_0$, так как в противном случае утверждение теоремы тривиально.

Так как X — паракомпактное p-пространство, в силу теоремы 16 работы [5] существует совершенное отображение $f_1: X\to Y_1$ на метризуемое пространство Y_1. Очевидно, $w(Y_1)\leqslant\tau$.

В силу леммы 1 работы [1] множество $X\diagdown Lb(X)$ замкнуто в X. Так как пространство X нормально, для каждого открытого в $X\diagdown Lb(X)$ множества U типа F_σ и для любого открытого в X множества $W\supseteq U$ существует такое открытое в X множество $V\subseteq W$ типа F_σ, что $V\cap(X\diagdown Lb(X))=U$. Пользуясь коллективной нормальностью пространства X (Бинг; см., например, [2], стр. 80, предложение 8), для каждого дискретного в $X\diagdown Lb(X)$ (следовательно, и в X) семейства $\{U_\alpha: \alpha\in\mathfrak{A}\}$ открытых в $X\diagdown Lb(X)$ множеств типа F_σ можно построить такое дискретное в X семейство $\{V_\alpha: \alpha\in\mathfrak{A}\}$ открытых подмножеств X типа F_σ, что для всех $\alpha\in\mathfrak{A}$ выполнено равенство $V_\alpha\cap(X\diagdown Lb(X))=U_\alpha$.

Так как пространство $X\diagdown Lb(X)$ метризуемо, в силу совершенной нормальности и метризационного критерия Бинга (см. [2], стр. 125, теорема 16а) оно имеет σ-дискретную базу из множеств типа F_σ. Пусть эта база есть $\{U_\alpha^i: \alpha\in\mathfrak{A}_i, i\in N\}$, где $\{U_\alpha^i: \alpha\in\mathfrak{A}_i\}$ — дискретная система для каждого $i\in N$, $|\mathfrak{A}_i|\leqslant\tau$. Для каждого $i\in N$ построим дискретное семейство $\{V_\alpha^i: \alpha\in\mathfrak{A}_i\}$ открытых в X множеств типа F_σ, удовлетворяющих условию $V_\alpha^i\cap(X\diagdown Lb(X))=U_\alpha^i$ для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}_i$.

Пусть $i\in N$. Ее $E^{|\mathfrak{A}_i|}=\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}_i}[0, 1]_\alpha$ — объединение $|\mathfrak{A}_i|$ штук игл-отрезков, имеющих общую точку 0, со следующей метрикой: расстояние между точками одной иглы равно расстоянию между ними на отрезке $[0, 1]$, а между точками разных игл — сумме расстояний до 0. Все аксиомы метрики легко проверяются.

В силу нормальности пространства X для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}_i$ существует такая непрерывная функция $g_{i\alpha}$: $X\to[0,1]_\alpha$, что $V_\alpha^i=g_{i\alpha}^{-1}(0,1]_\alpha$. Определим (очевидным образом непрерывное) отображение g_i: $X\to E^{|\mathfrak{A}_i|}$ так:

$$g_ix=\begin{cases} g_{i\alpha}x & \text{при } x\in V_\alpha^i, \\ 0 & \text{при } x\in X\setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}_i} V_\alpha^i. \end{cases}$$

Рассмотрим отображение $f=f_1\wedge(\bigwedge\limits_{i\in N}g_i):X\to Y_1\times\prod\limits_{i\in N}E^{|\mathfrak{A}_i|}$. Пусть $Y_2=fX$ и f_2: $X\to Y_2$ — отображение, совпадающее с f. В силу леммы 1.5 работы ([6]) отображение f_2 совершенно. Так как для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}_i$, $i\in N$, выполнено $g_i^{-1}g_iV_\alpha^i=V_\alpha^i$, то и $f_2^{-1}f_2V_\alpha^i=V_\alpha^i$. Следовательно, ограничение $f_2|_{X\setminus Lb(X)}$: $X\setminus Lb(X)\to Y_2$ является вложением, так как $\{V_\alpha^i\cap(X\setminus\setminus Lb(X)):\alpha\in\mathfrak{A}_i,\ i\in N\}$ — база в $X\setminus Lb(X)$. Поэтому для каждого $x\in X\setminus\setminus Lb(X)$ имеем $f_2^{-1}f_2x\setminus\{x\}\subseteq Lb(X)$. Пусть $Ux\subseteq X$ — произвольная окрестность точки $x\in X\setminus Lb(X)$. Тогда множество $F=f_2^{-1}f_2x\setminus Ux\subseteq Lb(X)$ бикомпактно в силу бикомпактности отображения f_2. Поэтому существует такая окрестность $UF\subseteq X$, что $[UF]_X\subseteq Lb(X)$ и бикомпактно. Положим $U=f_2^{\#}(Ux\cup UF)$. В силу замкнутости отображения f_2 множество $U\subseteq Y_2$ открыто. Кроме того, $f_2x\in U$, что очевидно. Тогда $x\in f_2^{-1}U\setminus[UF]_X\subseteq Ux$, т. е. отображение f_2 удовлетворяет условию (*) теоремы 1. Из построения следует, что пространство Y_2 метризуемо и $w(Y)\leqslant\tau$.

Если $\dim X=\infty$, то мы можем, считая, что $Y_2\subseteq\overline{R}^\tau$ (см. теорему 2а), рассмотреть отображение $X\to\overline{R}^\tau$, совпадающее с f_2, и воспользоваться теоремой 1.

Пусть $\dim X\leqslant n$. Тогда в силу факторизационной теоремы для метризуемых пространств (см. ([2]), стр. 388) существуют такое метризуемое пространство Y_3, $w(Y_3)\leqslant\tau$, $\dim Y_3\leqslant n$, и такие непрерывные отображения f_3: $X\xrightarrow{\text{на}}Y_3$ и h: $Y_3\to Y_2$, что $f_2=hf_3$. В силу леммы 1.4 работы ([6]) отображение f_3 совершенно. Очевидно также, что оно удовлетворяет условию (*). В силу теоремы 2б) мы можем считать, что $Y_3\subseteq\overline{R}^{n\tau}$ и что имеется отображение $X\to\overline{R}^{n\tau}$, удовлетворяющее всем условиям теоремы 1. Поэтому пространство X имеет бикомпактное расширение vX с первой аксиомой счетности веса τ и размерности $\dim vX\leqslant n$.

Теорема 3 доказана. Точно таким же методом могут быть доказаны следующие теоремы для размерности Ind.

Теорема 4. *Для того чтобы наследственно финально-компактное пространство X веса $w(X)\leqslant\tau$ (и $\operatorname{loc}\operatorname{Ind}Lb(X)\leqslant n$) имело совершенно нормальное бикомпактное расширение vX веса $w(vX)\leqslant\tau$ (и размерности $\operatorname{Ind}vX\leqslant n$), необходимо и достаточно, чтобы существовали совершенно нормальный бикомпакт Y веса $w(Y)\leqslant\tau$ (и $\operatorname{Ind}Y\leqslant n$) и непрерывное отображение f: $X\xrightarrow{\text{в}}Y$, удовлетворяющее условию (*).*

Теорема 5. *Пусть X — наследственно финально-компактное p-пространство, множество $X\setminus Lb(X)$ метризуемо (и $\operatorname{Ind}X\leqslant n$).*

Тогда существует такое совершенно нормальное бикомпактное расширение vX пространства X, что $w(vX)=w(X)$ (и $\operatorname{Ind}vX\leqslant n$).

Замечание. Легко видеть, что совершенное отображение f: $X\to Y$ удовлетворяет условию (*) тогда и только тогда, когда отображение $f|_{X\setminus Lb(X)}$: $X\setminus Lb(X)\to Y$ является вложением.

Пользуюсь возможностью поблагодарить В. И. Пономарева за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. М. Ульянов*, Вестн. Московск. унив., матем., механ., № 2, 13 (1973). [2] *П. С. Александров, Б. А. Пасынков*, Введение в теорию размерности, «Наука», 1973. [3] *Б. А. Пасынков*, Тр. Московск. матем. общ., т. 13, 136 (1965). [4] *К. Куратовский*, Топология, т. 2, М., 1969. [5] *А. Архангельский*, ДАН, т. 151, № 4, 751 (1963). [6] *В. И. Пономарев*, УМН, т. 21, в. 4, 101 (1966).