Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 5

УДК 539.3 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

А. Б. ЕФИМОВ, В. И. МАЛЫЙ

О ПРИНЦИПЕ ВОЛЬТЕРРА И МЕТОДЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 19 VI 1973)

Согласно принципу Вольтерра ([1-3]), решение задач линейной вязкоупругости разделяется на решение соответствующей упругой задачи и расшифровку функций операторов. Эти функции получаются из упругого решения заменой модулей на вязкоупругие операторы. Точной или приближенной расшифровке поддаются функции в случае неизменных во времени свойств материалов. При старении материала, когда ядра операторов неразностные, обычные методы решения задач неприменимы. Решение многих задач со старением можно получить, повторяя ход рассуждений упругой задачи с учетом порядка в произведении операторов ([4]).

Ниже излагается приближенный метод решения задач вязкоупругости со старением — метод аналитического продолжения, дается оценка его погрешности. Доказано существование решения вязкоупругой задачи. Принцип Вольтерра обобщается на задачи для стареющих материалов. Подобное обобщение в частном случае было дано в ([5]), а метод аналитического продолжения уже применялся при решении одной задачи со старением ([6]) при численном ее решении с оценкой погрешности.

1. Систему уравнений первой краевой задачи вязкоупругости можно представить в виде

$$\Delta\hat{\mathbf{E}}\mathbf{u}+\frac{1}{1-2\hat{\mathbf{v}}_r}\nabla\operatorname{div}\hat{\mathbf{E}}\mathbf{u}+2(1+\hat{\mathbf{v}}_r)\mathbf{f}=0,\qquad \mathbf{r}\in\Omega; \tag{1,1}$$

$$\sigma_{ij}n_j=F_i,\quad \mathbf{r}\in S; \tag{1,2}$$

$$\sigma_{ij}=(1+\hat{\mathbf{v}}_r)^{-1}\hat{\mathbf{E}}\varepsilon_{ij}+\delta_{ij}\frac{\hat{\mathbf{v}}_r}{(1+\hat{\mathbf{v}}_r)(1-2\hat{\mathbf{v}}_r)}\hat{\mathbf{E}}\varepsilon_{kk}; \tag{1,3}$$

$$\varepsilon_{ij}={}^1/_2(u_{i,j}+u_{j,i}). \tag{1,4}$$

Здесь σ_{ij} — напряжения, $\mathbf{u}$ — перемещения, Ω — объем тела, S — его поверхность, n_j — компоненты вектора нормали к поверхности, $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{v}}_r$ — аналоги модуля Юнга и коэффициента Пуассона — некоммутативные интегральные операторы общего вида. Эти операторы определяются в опытах на одноосное растяжение – сжатие ($\sigma_{11}=\hat{\mathbf{E}}\varepsilon_{11}$), причем $\hat{\mathbf{v}}_r$ выражается через оператор поперечной деформации $\hat{\boldsymbol{\psi}}$, связывающий ε_{22} и σ_{11} ($\varepsilon_{22}=\hat{\boldsymbol{\psi}}\sigma_{11}$), следующим образом: $\hat{\mathbf{v}}_r=-\hat{\mathbf{E}}\hat{\boldsymbol{\psi}}$. Оператор $\hat{\mathbf{v}}_r$ непосредственно в опытах на одноосное растяжение не определяется в отличие от $\hat{\mathbf{v}}_l$, который связывает поперечную деформацию с продольной ($\varepsilon_{22}=-\hat{\mathbf{v}}_l\varepsilon_{11}$). По определению этих операторов имеем $\mathbf{E}^{-1}\hat{\mathbf{v}}_r=\hat{\mathbf{v}}_l\hat{\mathbf{E}}^{-1}=\hat{\boldsymbol{\psi}}$.

Рассмотрим упругую задачу, соответствующую (1,1) — (1,4). Существование и свойства ее решения исследовались различными путями. Например, в работах ([7-9]) решение рассматривалось в пространстве W_1 типа энергетического, в котором норма функций имеет вид

$$\|\mathbf{u}\|^2_{W_1}=2\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2\, d\Omega. \tag{1,5}$$

Введем пространство $\mathbf{H}$, которое является комплексификацией W_1, т. е. пространство комплексных функций, действительная и мнимая части которых принадлежат W_1. Используя результаты ([7], [9]), можно показать, что решение упругой задачи и при комплексном ν существует и, как элемент $\mathbf{H}$, аналитически зависит от ν по крайней мере в полосе $-1<\mathrm{Re}\,\nu<$ $<0{,}5$. Производные $\mathbf{u}$ по координатам — обобщенные функции, аналитические по ν в той же области ([10]). Упругое решение представимо рядом Тейлора в окрестности своей регулярности точки ν_0

$$\mathbf{u}(E,\nu,\mathbf{r},t)=\frac{1}{E}\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_i(\mathbf{r},t)\,(\nu-\nu_0)^i, \qquad -1<\nu_0<0{,}5. \tag{1,6}$$

Коэффициенты $\mathbf{a}_i$ зависят от параметра t через заданные функции $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$. Ряд (1.6) сходится абсолютно, равномерно в круге сходимости, причем заведомо сходится при $|\nu-\nu_0|<0{,}5-\nu_0$.

Возвращаясь к вязкоупругой задаче, рассмотрим операторный ряд

$$\mathbf{u}(\hat{\mathbf{E}},\hat{\nu}_r,\mathbf{r},t)=\hat{\mathbf{E}}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} (\hat{\mathbf{v}}_r-\nu_0)^i\mathbf{a}_i(\mathbf{r},t), \tag{1,7}$$

который получается, если в упругом решении (1,6) константы E и ν заменить операторами вязкоупругости с учетом порядка в их произведении. Если норма оператора $(\hat{\mathbf{v}}_r-\nu_0)$ меньше $(0{,}5-\nu_0)$ или меньше радиуса круга сходимости, то операторный ряд (1,7) абсолютно сходится и представляет собой функцию операторов $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{v}}_r$ ([11]). Эта функция удовлетворяет системе (1,1)—(1,4), так как (1,6) есть решение соответствующей упругой задачи. Функции $\mathbf{a}_i$ — это коэффициенты Тейлора упругого решения (1,6).

На произвольном конечном отрезке времени $[0, T]$ рассмотрим функции с весовыми нормами ($\|\varphi(t)\|=\max\limits_t|\varphi(t)e^{-\alpha t}|$), где α выбирается достаточно большим. Можно показать, что в этом пространстве норму $\|\hat{\mathbf{v}}_r-\nu_0\|$ можно считать меньше $(0{,}5-\nu_0)$ и, следовательно, ряд (1,7) сходится, а его сумма есть решение задачи (1,1)—(1,4). Оно получается из упругого (1,6) заменой констант E и ν операторами $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{v}}_r$ с учетом порядка в их произведении. Тем самым доказывается существование решения вязкоупругой задачи и обобщается принцип Вольтерра на задачи со старением.

Рассмотрим некоторый параметр напряженно деформированного состояния $\mathbf{V}(\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{v}}_r, \mathbf{r}, t)$ (скаляр, вектор или тензор), который образован из вектора $\mathbf{u}$ с помощью некоторого оператора $\hat{\mathbf{M}}(\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{v}}_r, \mathbf{r})$ по координатам. Если зависимость последнего от $\hat{\mathbf{v}}_r$ аналитическая, то справедлив обобщенный принцип Вольтерра.

2. Операторные ряды типа (1,7), дающие точное решение вязкоупругой задачи, не представляют интереса для практики. Однако ряд (1,7) можно рассматривать с точки зрения разложения решения по малому параметру $(\hat{\mathbf{v}}-\nu_0)$ (или по некоторой иной аналитической функции $\hat{\mathbf{v}}$). Примем за приближенное решение отрезок из первых членов ряда Тейлора:

$$\mathbf{u}_m(\hat{\mathbf{E}},\hat{\mathbf{v}}_r,\mathbf{r},t)=\hat{\mathbf{E}}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} (\hat{\mathbf{v}}_r-\nu_0)^i\mathbf{a}_i(\mathbf{r},t). \tag{2,1}$$

Определение нескольких первых коэффициентов $\mathbf{a}_i$, т. е. первых производных по ν упругого решения обычно не представляет труда, однако при численном решении упругой задачи приходим к некорректной операции дифференцирования. Воспользуемся аналитическим продолжением упругого решения с интервала $-1<\nu<0{,}5$ в плоскость комплексных ν ([6]). Численно или аналитически определим решение $\mathbf{u}$ упругой задачи (1,6) при комплексных ν, принадлежащих некоторому контуру Γ, охватывающему точку ν_0. Тогда коэффициенты $\mathbf{a}_j$ определяются с помощью корректной операции интегрирования:

$$\mathbf{a}_j(\nu_0, \mathbf{r}, t) = \frac{E}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\mathbf{u}(E, \nu, \mathbf{r}, t)}{(\nu-\nu_0)^{j+1}}\, d\nu; \tag{2,2}$$

Здесь $\mathbf{u}(E, \nu, \mathbf{r}, t)$ есть аналитическое продолжение упругого решения в область комплексных ν, а Γ выбирается так, чтобы радиус вписанной в Γ окружности с центром в ν_0 был больше нормы $\|\hat{\mathbf{v}}_r-\nu_0\|$.

Построение аналитического продолжения упругого решения, как правило, не труднее, чем самого упругого решения. Обычно можно ограничиться нулевым и первым членами ряда Тейлора. Выражение для функции $\mathbf{V}_1$ деформированного состояния при заданных поверхностных и массовых силах имеет вид

$$\mathbf{V}_1 = \hat{\mathbf{E}}^{-1}(\mathbf{a}_0 - \nu_0\mathbf{a}_1) + \hat{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{v}}_r\mathbf{a}_1 = \hat{\mathbf{E}}^{-1}(\mathbf{a}_0 - \nu_0\mathbf{a}_1) + \hat{\psi}\mathbf{a}_1. \tag{2,3}$$

Таким образом, для построения решения необходимы два оператора $\hat{\mathbf{E}}^{-1}$ и $\hat{\psi}$, которые определяются в опытах на ползучесть. Последний из них может быть найден из кривых поперечной деформации во времени или из опытов на ползучесть под действием гидростатического давления ($\hat{\psi} = 0{,}5\hat{\mathbf{E}}^{-1} - {}^1/{}_6\hat{\mathbf{K}}^{-1}$). Если же исследуется функция $\mathbf{V}_2$ напряженного состояния, то достаточно одного оператора $\hat{\mathbf{v}}_r$. Аналитическое продолжение упругого решения позволяет не только построить приближенное решение, но и оценить его точность. Действительно, из формулы (2,2) следует оценка

$$\|\hat{\mathbf{E}}\mathbf{u} - \hat{\mathbf{E}}\mathbf{u}_m\| = \max_t |\hat{\mathbf{E}}\mathbf{u} - \hat{\mathbf{E}}\mathbf{u}_m| \leqslant \mathbf{M}(\nu_0, \mathbf{r}) \frac{R}{R - \|\hat{\mathbf{v}}_r - \nu_0\|} \left(\frac{\|\hat{\mathbf{v}}_r - \nu_0\|}{R} \right)^{m-1}; \tag{2,4}$$

здесь $\mathbf{M}(\nu_0, \mathbf{r}) = \max\limits_t \delta_m(\nu_0, \mathbf{r}, t)$,

$$\delta_m(\nu_0, \mathbf{r}, t) = \max_\nu |E\mathbf{u}(E, \nu, \mathbf{r}, t) - E\mathbf{u}_m(E, \nu, \mathbf{r}, t)|, \quad \nu \in \Gamma. \tag{2,5}$$

Можно улучшить оценку, вычислив несколько коэффициентов точно. Тогда имеем

$$\max_t |\hat{\mathbf{E}}\mathbf{u} - \hat{\mathbf{E}}\mathbf{u}_m| \leqslant \sum_{i=m+1}^{m+n} \|\hat{\mathbf{v}}_r - \nu_0\|^i \max_t |\mathbf{a}_i(\nu_0, \mathbf{r}, t)| +$$

$$+ \mathbf{M}_1(\nu_0, \mathbf{r}) \frac{R}{R - \|\hat{\mathbf{v}}_r - \nu_0\|} \left(\frac{\|\hat{\mathbf{v}}_r - \nu_0\|}{R} \right)^{m+n+1}, \tag{2,6}$$

где $\mathbf{M}_1(\nu_0, \mathbf{r}) = \max\limits_t \max\limits_\nu |E\mathbf{u}(E, \nu, \mathbf{r}, t) - E\mathbf{u}_{m+n}(E, \nu, \mathbf{r}, t)|$.

Оценка существенно зависит от контура Γ. Она растет при сужении контура за счет $(R - \|\hat{\mathbf{v}}_r - \nu_0\|)^{-1}$, а при расширении его — за счет $\mathbf{M}$ и $(\|\hat{\mathbf{v}}_r - \nu_0\|/R)$. Таким образом, варьируя контур, можно минимизировать оценку.

В случае, когда внешние нагрузки изменяются пропорционально одному или нескольким параметрам, решение вязкоупругой задачи имеет вид

$$\mathbf{u}=\sum_{k=1}^{n}\hat{\mathbf{u}}_k(\hat{\mathbf{v}}_r,\mathbf{r})\psi_k(t). \tag{2,7}$$

Здесь приближенно строится и оценивается по методу аналитического продолжения каждый из операторов $\hat{\mathbf{u}}_k(\hat{\mathbf{v}}_k,\mathbf{r})$.

Теми же методами, что и выше, исследуется случай, когда на границе тела заданы перемещения. При этом решение представляется в виде

$$\mathbf{u}=\sum_{i=0}^{\infty}(\hat{\mathbf{v}}_l-\nu_0)^i\mathbf{b}_i(\mathbf{r},t). \tag{2,8}$$

Наконец, решение смешанной задачи имеет вид

$$\mathbf{u}=\hat{\mathrm{E}}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}(\hat{\mathbf{v}}_r-\nu_0)^i\mathbf{a}_i(\mathbf{r},t)+\sum_{i=0}^{\infty}(\hat{\mathbf{v}}_l-\nu_0)^i\mathbf{b}_i(\mathbf{r},t). \tag{2,9}$$

Данный метод применим в задачах для кусочно-однородных тел и других, где удается исследовать аналитическую зависимость упругого решения от констант материала. Решение представляется в виде ряда Тейлора, с помощью аналитического продолжения строятся первые члены, а остаток ряда оценивается. Эта оценка является отличительной особенностью данного метода.

Описанный метод использовался ([6]) для численного решения задачи о вязкоупругом весовом полушаре, лежащем на жестком основании. Рассчитывались перемещения поверхности и оценивалась погрешность решения.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений
Менделеево Московской обл.

Поступило
23 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Х. Арутюнян,* Некоторые вопросы теории ползучести, 1952. [2] *А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря,* Основы математической теории термовязкоупругости, «Наука», 1970. [3] *Ю. Н. Работнов,* Ползучесть элементов конструкций, «Наука», 1966. [4] *А. Б. Ефимов,* Механика полимеров, № 3 (1966). [5] *В. Д. Харлаб,* Сборн. Прочность и пластичность, «Наука», 1971. [6] *А. Б. Ефимов, В. И. Малый,* ПММ, т. 35, № 1 (1971). [7] *С. Г. Михлин,* Сборн. Проблемы математического анализа, Л., 1966. [8] *С. Г. Михлин,* Вестн. Ленингр. унив., № 7 (1967). [9] *С. Г. Михлин,* Вестн. Ленингр. унив., № 7 (1970). [10] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов,* Обобщенные функции и действия над ними, 1959. [11] Функциональный анализ СМБ, «Наука», 1972.