

З. А. ШТЕЙНГРАД

ГАРМОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И МОНАДНЫЙ ФОРМАЛИЗМ ЗЕЛЬМАНОВА

(Представлено академиком В. А. Фоком 6 II 1974)

1. Хорошо известно ⁽¹⁾, что гармонические координаты удовлетворяют общековариантному уравнению д'Аламбера

$$g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\varphi^{(u)}=0, \quad (1)$$

где $\varphi^{(u)}=x_h^u$ — гармонические координаты. В настоящей статье греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, латинские — лишь 1, 2, 3. Принята метрика с сигнатурой $(-+++)$.

В работе ⁽²⁾ было введено понятие гармонической системы отсчета, согласно которому для гармоничности системы отсчета необходимо, чтобы уравнение (1), записанное в произвольных координатах, принадлежащих исследуемой системе отсчета, имело три линейно независимых решения (интерпретируемых как гармонические координаты) при условии

$$\nabla_0\varphi^{(h)}=0. \quad (2)$$

Будем (следуя А. Л. Зельманову ^(3, 4)) считать, что задана система отсчета, если определено поле единичных (и одиночных) времениподобных векторов b^{α} (так называемых монад), касательных в каждой точке конгруэнции мировых линий частиц, составляющих эту систему отсчета. (Используется слабая гармоничность.)

Таким образом, система отсчета, определяемая некоторым полем монад, будет гармонической только в том случае, если в ней интегрируется система уравнений

$$h^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\varphi=F^{\alpha}\nabla_{\alpha}\varphi, \quad (3)$$

$$b^{\alpha}\nabla_{\alpha}\varphi=0, \quad (4)$$

где $h^{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}+b^{\alpha}b^{\beta}$ — метрический тензор трехмерного пространства отсчета, а $F^{\alpha}=-b^{\beta}\nabla_{\beta}b^{\alpha}$ — взятый с обратным знаком вектор ускорения данного пространства отсчета относительно локально геодезической системы отсчета, мгновенно сопутствующей исследуемой. Отметим, что уравнение (4) является следствием условия (2), а уравнение (3) получается после несложных математических преобразований (при учете (4)) из (1).

Согласно теории дифференциальных уравнений, для нахождения условий интегрируемости системы (3), (4), необходимо составить коммутатор из операторов $b^{\alpha}\nabla_{\alpha}$ и $h^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}-F^{\alpha}\nabla_{\alpha}$ и применить его к φ . В результате этой операции получим

$$\begin{aligned} D^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\varphi &= [h_{\alpha}^{\beta}(F_{\nu}-h_{\nu}^{\mu}\nabla_{\mu})(D^{\nu\alpha}-1/2h^{\nu\alpha}D)- \\ &- 1/2h_{\alpha}^{\beta}(b^{\mu}\nabla_{\mu}F^{\alpha}-F^{\mu}\nabla_{\mu}b^{\alpha})]\nabla_{\beta}\varphi \equiv K^{\beta}\nabla_{\beta}\varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

где $D^{\alpha\beta}=1/2(h^{\alpha\mu}\nabla_{\mu}b^{\beta}+h^{\beta\mu}\nabla_{\mu}b^{\alpha})$.

Если это уравнение представляет собой непосредственное следствие уравнения (3), то изучаемая нами система уравнений вполне интегрируема (5). Если это не так, то к уравнению (5) следует снова применить опе-

ратор $b^{\alpha}\nabla_{\alpha}$ и проверить, не является ли вновь полученное уравнение непосредственным следствием выражений (3) и (5). Вообще говоря, этот процесс можно было бы продолжать до бесконечности. Однако в этом нет необходимости. В самом деле, нас должны интересовать только такие условия интегрируемости системы уравнений (3), (4), при которых эта система имеет три линейно независимых решения. Но такое требование будет удовлетворено только в том случае, если полученные условия интегрируемости не будут накладывать никаких ограничений на первые производные от φ . Это хорошо видно из следующего рассуждения. Если условия интегрируемости не накладывают ограничений на первые производные от φ , то всегда можно задать на некоторой локальной гиперповерхности три набора независимых значений этих производных, что и приводит к выполнению нашего требования. С другой стороны, уравнения (3), (5) и все остальные, получающиеся из них при отыскании условий интегрируемости, можно рассматривать как алгебраические системы линейных уравнений относительно девяти неизвестных

$$\nabla_i \nabla_k \varphi; \quad \nabla_i \varphi. \quad (6)$$

Их количество будет именно таким, так как согласно (4) любая производная по x^0 от φ выражается через пространственную производную.

Уже из такого подхода видно, что полное число независимых уравнений в системе не может превышать девяти, так как в противном случае она будет несовместной. Но три неизвестных такой системы, являющиеся первыми производными от φ , должны принимать произвольные значения. Поэтому число уравнений, которые надлежит исследовать, сокращается до шести.

2. Так как согласно теореме Римана ⁽⁶⁾ гармонические координаты могут быть введены в любом пространстве, то аналогичное утверждение может быть высказано и о гармонических системах отсчета. Весьма часто, особенно при физических экспериментах, необходимо использование систем отсчета, позволяющих синхронизировать часы во всем пространстве или в некоторой его части (так называемых синхронных систем отсчета ⁽⁷⁾). Но при исследовании уравнений Эйнштейна во многих случаях применяются гармонические координаты. Поэтому представляется интересным изучить вопрос о полях тяготения, допускающих синхронизацию часов в гармонических системах отсчета. Рассмотрим эту проблему, предполагая, что уравнение (5) является непосредственным следствием уравнения (3).

Как указывалось выше, эти уравнения можно рассматривать в качестве линейных форм относительно величин (6). В линейной алгебре доказывается, что N форм будут линейно зависимыми, если равны нулю все определители ранга N , составленные из коэффициентов при неизвестных. Значит, в нашем случае должны выполняться следующие условия:

$$\begin{vmatrix} h^{\alpha\beta} & h^{\mu\nu} \\ D^{\alpha\beta} & D^{\mu\nu} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} h^{\alpha\beta} & F^{\mu} \\ D^{\alpha\beta} & K^{\mu} \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

из которых получим ⁽⁸⁾

$$D^{\alpha\beta} = \rho h^{\alpha\beta}, \quad K^{\alpha} = \rho F^{\alpha}, \quad (8)$$

где ρ — скаляр.

Таким образом, системы отсчета с изотропным тензором скоростей деформации будут гармоническими, если векторы K^{α} и F^{α} пропорциональны. Отметим, что не всякое поле тяготения допускает системы отсчета такого рода. Исследуемая гармоническая система отсчета будет допускать синхронизацию часов, если дополнительно к условиям гармоничности (8) удовлетворятся условия синхронности системы отсчета ^(8, 7)

$$A_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (h_{\alpha}^{\mu} \nabla_{\mu} b_{\beta} - h_{\beta}^{\mu} \nabla_{\mu} b_{\alpha}) = 0, \quad (9)$$

$$F_{\alpha} = 0. \quad (10)$$

Условия (8) — (10) приводят к следующей замкнутой системе дифференциальных уравнений для векторного поля монад b^α :

$$\nabla_\alpha b_\beta = \rho h_{\alpha\beta}, \quad (11)$$

$$h_\alpha{}^\beta \nabla_\beta \rho = 0. \quad (12)$$

Применив к (11) ковариантную производную ∇_μ и составив коммутатор, получим при учете (12) следующие условия интегрируемости уравнений (11):

$$b^\alpha R_{\alpha\beta\mu\nu} = h_{\beta\nu} \nabla_\mu \rho - h_{\beta\mu} \nabla_\nu \rho + \rho^2 (b_\nu g_{\beta\mu} - b_\mu g_{\beta\nu}). \quad (13)$$

Свертывая эти выражения по $\beta\nu$ и снова используя (12), найдем

$$b^\alpha R_{\alpha\mu} = 3(\nabla_\mu \rho - \rho^2 b_\mu), \quad (14)$$

что при подстановке в (13) даст

$$b^\alpha [R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{3}(g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu} - g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu})] - \frac{1}{3} b^\alpha b_\beta (b_\nu R_{\alpha\mu} - b_\mu R_{\alpha\nu}) = 0. \quad (15)$$

Однако из (14) и (12) следует

$$b^\alpha h_\beta{}^\mu R_{\alpha\mu} = 0. \quad (16)$$

Это соотношение позволяет переписать условия интегрируемости (15) в окончательной форме

$$b^\alpha [R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{3}(g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu} - g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu})] = b_\alpha \tilde{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = 0, \quad (17)$$

уже линейной относительно b^α .

Таким образом, пространство постоянной кривизны $(^8)$ допускает синхронизацию часов в гармонических системах отсчета. Если пространство таковым не является, то для того, чтобы исследуемая система отсчета обладала требуемыми свойствами, компоненты поля монад должны удовлетворять как исходной системе (11), так и условиям (17).

Дифференцируя ковариантно равенство (17) и используя систему (11), получим

$$\rho \tilde{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = -b^\sigma \nabla_\alpha \tilde{R}_{\sigma\beta\mu\nu}. \quad (18)$$

Продолжая этот процесс, можно получить еще два условия (которые, в связи с их громоздкостью, мы не приводим), дополняющие равенства (17) и (18) до полной системы условий, которым должно удовлетворять поле монад, описывающее гармонические системы отсчета с синхронизованными часами. Отметим, что гравитационные поля, удовлетворяющие этим условиям, допускают систему координат, в которой квадрат четырехмерного интервала имеет вид

$$dS^2 = -(dx^0)^2 + \Psi(x^0) f_{ik}(x^m) dx^i dx^k, \quad (19)$$

где Ψ и f_{ik} определяются из уравнений Эйнштейна.

3. Если уравнение (5) не является непосредственным следствием уравнения (3), то, как уже отмечалось, к нему нужно применить оператор $b^\alpha \nabla_\alpha$. В результате получим

$$D^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi = (3b^\mu \nabla_\alpha \nabla_\mu b^\beta + b^\mu b^\nu R_{\nu\mu\alpha}{}^\beta) h^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma \nabla_\beta \varphi = L^\alpha \nabla_\alpha \varphi, \quad (20)$$

где L^α — вектор, полученный вследствие проделанной операции.

Система уравнений (3), (5) и (20) будет определять синхронно-гармоническую систему отсчета, если наряду с выражениями (9) и (10) бу-

дуг выполняются условия

$$\dot{D}^{\alpha\beta} = \sigma_1 D^{\alpha\beta} + \sigma_2 h^{\alpha\beta}, \quad (21)$$

$$L^\alpha = \sigma_1 K^\alpha, \quad (22)$$

где σ_1 и σ_2 — скаляры.

В общем случае должна быть совместна система уравнений (3), (5), (20) и

$$\ddot{D}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi = M^\alpha \nabla_\alpha \varphi, \quad (23)$$

$$\dddot{D}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi = N^\alpha \nabla_\alpha \varphi, \quad (24)$$

$$\dddot{D}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi = R^\alpha \nabla_\alpha \varphi, \quad (25)$$

где коэффициенты при первых и вторых производных от φ получаются в результате последовательного применения оператора к уравнению (20).

Таким образом, наиболее общими гравитационными полями, допускающими синхронизацию часов в гармонических системах отсчета, будут поля, для которых удовлетворяются условия (9), (10),

$$\dddot{D}^{\alpha\beta} = \lambda_1 \ddot{D}^{\alpha\beta} + \lambda_2 \dot{D}^{\alpha\beta} + \lambda_3 \dot{D}^{\alpha\beta} + \lambda_4 D^{\alpha\beta} + \lambda_5 h^{\alpha\beta}, \quad (26)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ — скаляры, и условия равенства нулю всех различных определителей шестого ранга, первые пять столбцов которых составлены из коэффициентов при вторых производных от φ , а последний — из коэффициентов при первых производных. Эти определители по построению аналогичны определителям, стоящим справа в (7).

Отметим, что полученные в настоящей работе условия интегрируемости системы уравнений (3), (4) являются необходимыми, но не достаточными. Можно показать, что достаточные условия при произвольной метрике получить невозможно.

Использованные в статье дифференциальные операторы и обозначения были получены и введены А. Л. Зельмановым.

Автор благодарен А. Л. Зельманову за постановку задачи и многочисленные обсуждения, а также проф. П. К. Рашевскому за обсуждение корректности использованных математических операций.

Поступило
2 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М., 1961. ² Э. А. Штейнгард, ДАН, т. 204, № 4, 831 (1972). ³ А. Л. Зельманова, Тез. докл. V Международн. конфер. по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1968. ⁴ А. Л. Зельманов, ДАН, т. 209, № 4, 822 (1973). ⁵ Л. П. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований, 1947. ⁶ В сборн. Об основаниях геометрии, М., 1956, стр. 309. ⁷ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., 1973.