Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 5

УДК 517.54:517.86 *МАТЕМАТИКА*

С. Л. КРУШКАЛЬ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КЛЕЙНОВЫХ ГРУПП И ИХ ДЕФОРМАЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 4 IV 1974)

Исследование квазиконформных деформаций фуксовых и квазифуксовых групп выявило целый ряд их свойств, получивших затем важные применения в теории пространств римановых поверхностей и теории квазиконформных отображений. Здесь мы покажем, что указанные свойства, с одной стороны, выполняются даже в более сильной форме, а с другой стороны, присущи и значительно более общим класса клейновых групп.

1°. Пусть G — клейнова группа (дискретная неэлементарная подгруппа группы $\mathscr{M}_{\bar{\mathbf{C}}}$ мёбиусовых автоморфизмов расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbf{C}}$) с множеством разрывности $\Omega(G)$ и предельным множеством $\Lambda(G)=\bar{\mathbf{C}}\setminus\Omega(G)$. Будем предполагать, что G конечного типа, т. е. $S=\Omega(G)/G$ — конечное объединение $\bigcup\limits_{j=1} S_j$ римановых поверхностей S_j конечного типа (g_j, n_j) (см. ([1])). Сопоставим проекциям $p_l\in S_j$ эллиптических неподвижных точек G при отображении π: $\Omega(G)\to S$ числа $\nu(p_l)$, равные порядкам соответствующих эллиптических элементов G, $1<\nu(p_l)<\infty$, а проекциям p_s параболических неподвижных точек $(p_s\in\bar{S}_j\setminus S_j)$ — число $\nu(p_s)=\infty$. Для каждой поверхности S_l в любой из компонент $\Omega_{ji}\subset\pi^{-1}(S_j)$ можно выбрать соответствующий фундаментальный многоугольник $P_{\Omega_j}{}^i$, ограниченный конечным числом попарно эквивалентных гладких жордановых кривых, а для $\bigcup\limits_{j=1} S_j$ можно выбрать N таких многоугольников, не эквивалентных между собой (относительно G), объединение P_G которых есть фундаментальная область группы G.

Пусть Δ — G-инвариантное объединение компонент связности $\Omega(G)$. Положим $S(\Delta)=\Delta/G=\bigcup\limits_{j=1}^{N(\Delta)} S_j$ и

$$d(\Delta)=\sum_{j=1}^{N(\Delta)} 3g_j-3N(\Delta)+\sum_{p\in S(\Delta)}[1-1/\nu(p)],$$

где g_j — род S_j, $[\alpha]$ означает целую часть числа α, $1/\nu(p)=0$ при $\nu(p)=\infty$. Обозначим через $M(\Delta, G)$ комплексное банахово пространство измеримых функций $\mu(z)$, $z\in\bar{\mathbf{C}}$, с носителями в Δ таких, что $\mu(z)\,d\bar{z}/dz$ — G-инвариант, с нормой $\|\mu\|_{M(\Delta,G)}=\|\mu\|_\infty$, через $B(\Delta, G)$ — комплексное банахово пространство голоморфных в Δ функций (форм) $\varphi(z)$ таких, что $\varphi(Az)A'^2(z)=\varphi(z)$, $A\in G$, с нормой $\|\varphi\|=\sup\limits_{z\in\Delta}\lambda^{-2}(z)\,|\varphi(z)|$, где $\lambda(z)\,|dz|$ — гиперболическая метрика в $\Omega(G)$. Тогда $\dim B(\Delta, G)=d(\Delta)$.

Будем считать, что $\Delta'=\Omega(G)\setminus\Delta\neq\emptyset$, $\{0, 1\}\subset\Lambda(G)$, и определим в $M(\Delta, G)$ операторы

$$K_\Delta\mu=-6\pi^{-1}\iint\limits_\Delta\mu(\zeta)(\zeta-z)^{-4}\,d\xi\,d\eta,$$

$$F_\Delta\mu=-\pi^{-1}z(z-1)\iint\limits_\Delta\mu(\zeta)[\zeta(\zeta-1)(\zeta-z)]^{-1}\,d\xi\,d\eta,$$

$$\zeta=\xi+i\eta,\quad z\in\Delta'.$$

Назовем объединение Δ **допустимым для** G, если $d(\Delta)>0$ и из равенства $K_\Delta\mu(z)=0$ в Δ' следует, что сужение $F_\Delta\mu|\Delta'=p(z)$, где $p(z)$ — полином не выше второй степени (т. е. μ соответствует нулевому классу когомологии Эйхлера ([2], [3])).

Требование существования допустимых объединений компонент $\Omega(G)$ накладывает на G весьма жесткие условия. Действительно, для любого Δ условие $K_\Delta\mu=0$ в Δ' дает, что $p(z)$ есть полином степени не выше второй в каждой компоненте из Δ'; мы же требуем, чтобы эти полиномы совпадали. Однако класс таких групп довольно широк. В него заведомо входят группы с инвариантной (не обязательно односвязной) компонентой, не исчерпывающей $\Omega(G)$. Если Ω_0 — такая компонента, то $\Omega(G)\setminus\Omega_0$ допустимо. Заметим еще, что если Δ допустимо, то $d(\Delta)\leqslant d(\Delta')$.

Пусть $E\subset\Delta$ — инвариантное относительно G множество положительной (плоской лебеговой) меры, $B(E, G)$ — пространство сужений на E элементов $B(\Delta, G)$ с нормой $\|\varphi\|_{B(E,G)}=\sup\limits_{z\in E}\lambda^{-2}(z)\,|\varphi(z)|$. Назовем множество E **массивным** в Δ, если его пересечение с каждой компонентой Δ имеет положительную меру.

Будем называть гомеоморфизм $f\colon\Delta\to\overline{C}$ **согласованным с** G в Δ, если $fGf^{-1}=G_f$ — клейнова группа с инвариантным объединением $f(\Delta)$, и положим $\chi_{f,\Delta}=f\circ A\circ f^{-1}$, $A\in G$. Если же гомеоморфизм f определен в $\Omega(G)$ и $\chi_{f,\Delta}=\chi_{f,\Omega(G)}\equiv\chi_f$ для всех G-инвариантных объединений $\Delta\subset\Omega(G)$, то назовем f **согласованным с** G или **деформацией** G. Если f конформен на открытом подмножестве $\Omega(G)$, то там можно рассмотреть производную Шварца $(f'''/f')-3(f''/f')^2/2$.

2^0. **Теорема 1.** *Пусть $\Omega(G)$ содержит допустимое объединение Δ. Тогда для всякого массивного множества $E'\subset\Delta'$ при некотором $\varepsilon_0=\varepsilon_0(E')>0$ существует антиголоморфный гомеоморфизм τ шара $U_{\varepsilon_0}=\{\varphi\in B(\Delta, G)\colon\|\varphi\|<\varepsilon_0\}$ в пространстве $B(E', G)$ такой, что $\tau(0)=0$, и каждый элемент $\varphi\in U_{\varepsilon_0}$ есть производная Шварца некоторого конформного гомеоморфизма $f\colon\Delta\to\overline{C}$, который продолжается до согласованного с G квазиконформного автоморфизма $\hat{f}\colon\overline{C}\to\overline{C}$, $\hat{f}|\Delta=f$, конформного вне E', причем $\hat{f}$ можно выбрать так, чтобы в точках E' он имел комплексную характеристику*

$$\mu_{\hat f}(z)=\lambda^{-2}(z)\,\overline{\psi(z)},\quad\psi=\tau(\varphi),\quad\mu_{\hat f}=\hat f_{\bar z}/\hat f_z.\qquad(*)$$

Доказательство этой теоремы опирается на свойства оператора $\hat{K}_{E'}\psi=K_{\Delta'}(\lambda^{-2}\overline{\psi})$, $\psi\in B(E', G)$ (и полагается равным нулю в $\Delta'\setminus E'$), аналогичные соответствующим утверждениям из ([4]), и оценку $\lambda(z)$ в компонентах $\Omega_0\subset\Omega(G)$ через эвклидово расстояние $\delta(z)=\rho(z, \partial\Omega_0)$ вблизи границы. Можно показать, что для групп G, у которых $\Omega(G)$ содержит более одной компоненты связности, справедливо обычное неравенство $\lambda(z)\geqslant1/4\delta(z)$, $z\in\Omega_0$ (мы считаем, что в единичном круге $\lambda(z)=(1-|z|^2)^{-1}$). Известная же в общем случае оценка Альфорса ([1]), основанная на сравнении Ω_0 со сферой с тремя выколотыми точками, значительно хуже и имеет вид $\lambda \geqslant \mathrm{const}/\delta \ln \delta$, что недостаточно для наших целей.

В случае, когда G — квазифуксова группа первого рода и $E'=\Delta'$, теорема 1 совпадает с теоремой Альфорса — Берса о квазиконформном продолжении конформных отображений (см. ([5], [6])) для конечномерного случая. Заметим также, что аналогичное теореме 1 утверждение справедливо и для определенных $\psi \in B(\Delta', G)$.

Для $E'=\Delta'$ имеет место следующая теорема единственности.

Теорема 2. *В односвязных компонентах $\Omega_0 \subset \Delta'$ функция $\psi \in B(\Delta', G)$, удовлетворяющая равенству * всюду в Ω_0, определяется по f однозначно.*

Доказательство основано на применении теоремы единственности Альфорса — Вейля ([7]) для круга.

3°. Укажем некоторые применения теоремы 1.

А. Пространство квазиконформных деформаций. Назовем Δ, допустимое для G, равномерно допустимым (локально равномерно допустимым), если $f(\Delta)$ допустимо для G_f при всех квазиконформных деформациях $f\colon \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ группы G с $\mu_f \in M(\Delta, G)$, $\|\mu_f\|<1$ (соответственно для G_f при $k(f)=\|\mu_f\|<\varepsilon$, где ε достаточно мало). Если Δ' — инвариантная компонента G, то Δ автоматически равномерно допустимо.

Рассмотрим пространство $T(\Delta, G)$ классов эквивалентных квазиконформных деформаций $f\colon \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ с $\mu_f \in M(\Delta, G)$, $\|\mu_f\|<1$, оставляющих неподвижными точки 0, 1, ∞ (см. ([8])). Как известно, $T(\Delta, G)$ — комплексное аналитическое многообразие. Если Δ равномерно допустимо для G, то теорема 1 позволяет дать следующую характеристику $T(\Delta, G)$ (и пространства $\hat{T}(\Delta, G)$ сильно эквивалентных квазиконформных деформаций G, когда Δ состоит из односвязных компонент).

Теорема 3. *Если Δ равномерно допустимо для G, то существует голоморфная биекция $T(\Delta, G)$ на ограниченную область $d(\Delta)$-мерной аналитической поверхности в $B(\Delta', G)$. В частности, если $d(\Delta)=d(\Delta')$, то $T(\Delta, G)$ биголоморфно эквивалентно ограниченной области в $B(\Delta', G)$.*

Б. Квазиконформная стабильность клейновых групп (см. ([9], [10])). Будем теперь считать, что группа G конечно-порожденная.

Рассмотрим компакты $Q \subset \Omega(G)$, которые содержат все лежащие в $\Omega(G)$ вершины P_G вместе с некоторыми их окрестностями. Будем говорить, что непрерывное отображение $f\colon \Omega(G) \to \overline{\mathbf{C}}$, согласованное с G, локально близко к тождественному, если $f(z)$ равномерно близко к z на некотором таком компакте Q.

Назовем группу G почти квазиконформно стабильной, если всякий допустимый гомоморфизм $\chi\colon G \to \mathscr{M}_{\overline{\mathbf{C}}}$, индуцированный непрерывным отображением $f\colon \Omega(G) \to \overline{\mathbf{C}}$, достаточно близким (локально) к тождественному, порождается квазиконформным автоморфизмом $f_0\colon \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ с малым $k(f_0)$.

Понятие почти стабильности (имеющее смысл и для групп конечного типа) формально слабее стабильности, введенной Л. Берсом. Автор предполагает, что они эквивалентны.

Теорема 4. *Для того чтобы группа G была почти стабильной, необходимо и достаточно, чтобы любой квазиконформный гомеоморфизм $f\colon \Omega(G) \to \overline{\mathbf{C}}$, согласованный с G и локально близкий к тождественному, продолжался до квазиконформного автоморфизма $\overline{\mathbf{C}}$.*

Доказательство опирается на рассуждения, примененные в ([10]), теорему 1 из ([11]) и теорему о продолжении Б. Маскита ([8]). Если не пользоваться этой теоремой ([8]), то критерий почти стабильности, даваемый теоремой 4, можно сформулировать в более слабой форме.

Из теоремы 4 вытекает, что все квазиконформные образы почти стабильной клейновой группы также почти стабильны. Для стабильных групп такое утверждение составляет содержание одной гипотезы Л. Берса ([9]) и теорема 4 дает ее доказательство в несколько ослабленной формулировке.

С помощью теоремы 1 доказываются следующие теоремы, указывающие некоторые классы почти стабильных и стабильных клейновых групп.

Теорема 5. *Всякая конечно-порожденная группа G, имеющая допустимое объединение Δ, локально равномерное, почти квазиконформно стабильна.*

Теорема 6. *Конечно-порожденная функциональная группа, имеющая более одной компоненты, квазиконформно стабильна.*

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
28 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *L. V. Ahlfors,* Am. J. Math., v. 86, № 2, 413 (1964). [2] *M. Eichler,* Math. Zs., B. 67, 267 (1957). [3] *I. Kra,* Automorphic Forms and Kleiman Groups, Mathematics Lecture Note Series, 1972. [4] *L. Bers,* J. Anal. Math., v. 18, 23 (1967). [5] *Л. Альфорс,* Лекции по квазиконформным отображениям, М., 1969. [6] *L. Bers,* Acta Math., v. 116, 113 (1966). [7] *L. V. Ahlfors, G. Weil,* Proc. Am. Math. Soc., v. 13, № 6, 975 (1962). [8] *B. Maskit,* Am. J. Math., v. 93, № 3, 840 (1971). [9] *L. Bers,* In: Several Complex Variables, I, Maryland, 1970; Lecture Notes in Math., v. 155, Berlin, 1970. [10] *С. Л. Крушкаль,* ДАН, т. 216, № 3 (1974). [11] *С. Л. Крушкаль,* Сибирск. матем. журн., т. 15, № 4 (1974).