

А. Л. КРЫЛОВ

**УРАВНЕНИЯ МЕДЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ  
В СИЛЬНО ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ**

(Представлено академиком М. А. Садовским 27 XII 1973)

Рассматриваются уравнения Максвелла в предположении малости токов смещения по сравнению с токами проводимости

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} B = -\frac{4\pi}{c} (j + j_0). \quad (1)$$

«Материальное» уравнение, представляющее собой следствие линеаризованных уравнений движения частиц плазмы, имеет вид (\*)

$$j = \hat{\sigma} E^*, \quad E^* = E + \frac{v}{c} \times B \quad (2)$$

(здесь  $E^*$  — значение электрического поля в системе координат, движущейся с локальной скоростью плазмы  $v$ ).

Уравнения (1), (2) описывают «возмущенное» поле и ток, происходящие на фоне стационарного «сильного» поля  $B_0$  (например, геомагнитного), формирующего вместе с заданным распределением стационарной невозмущенной плазмы тензор проводимости для тока возмущения. Например, для холодной плазмы (\*)

$$j = \sigma_0 \frac{(E^* \cdot B_0)}{B_0^2} B_0 + \sigma_1 \left( E^* - \frac{(E^* \cdot B_0)}{B_0^2} B_0 \right) + \sigma_2 \frac{E^* \times B_0}{B_0},$$

где  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  — скалярные функции (соответственно продольная, поперечная (пердсеновская) и холловская проводимости), зависящие от координат.

Рассматриваемый нами случай «сильного» поля  $B_0$  характеризуется при этом соотношением

$$\sigma_0 \gg \sigma_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (3)$$

(продольная проводимость значительно превосходит поперечную; в условиях магнитосферы отношение их достигает  $10^2$ – $10^3$ ). В предположении (4) естественно выделяется «продольная» координата, меняющаяся вдоль силовых линий (с.л.)  $B_0$ , и поперечные координаты, «нумерующие» с.л.:

$$x^\perp = (x^1, x^2), \quad x^\parallel = x^3.$$

Будем говорить, что пространство расслоено на с.л., а область  $D$  изменения  $x^\perp$  называть базой слоения. Например, для магнитосферы в качестве  $D$  удобно взять верхнюю полусферу Земли с обычными сферическими координатами (геомагнитными)  $\Theta$ ,  $\varphi$ , а в качестве  $x^\parallel$  — сферическое расстояние  $R$ . Координаты  $\Theta$ ,  $\varphi$ ,  $R$  в «дипольной» части магнитосферы просто выражаются через сферические координаты  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $r$ :

$$\sin \Theta = r^{-1/2} \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad R = r.$$

Введем обычным образом скалярный потенциал  $\Phi$ , векторный потенциал  $A$  и векторную функцию тока  $\Psi$  соотношениями

$$B = \text{rot } A, \quad E = -\text{grad } \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad j + j_0 = \text{rot } \Psi$$

с калибровкой \*  $A_3 = 0, \Psi_3 = 0$ .

Тогда вместо (1), (2), получим

$$\text{rot } \Psi - j_0 = \hat{\sigma}(-\text{grad } \Phi + E_0) \quad (4)$$

систему 1-го порядка для определения  $\Phi, \Psi$  при заданных «внешнем» токе  $j_0$  и «внешнем» электрическом поле

$$E_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{v}{c} \times B.$$

В нашей квазистационарной ситуации мы считаем  $\partial A / \partial t$  заданной величиной; можно рассматривать это предположение как первый шаг итерационного процесса: после нахождения из (4)  $\Phi$  и  $\Psi$  по  $\Psi$  найти  $A$  и т. д. При достаточной медленности изменения внешних условий легко показать асимптотическую сходимость процесса.

К уравнению (4) добавляются граничные условия, которые могут иметь различный характер. Мы рассмотрим условия на границе магнитосферы. Граница  $S$  магнитосферы состоит из двух несвязанных частей:  $S = S_a \cup S_b$ ; непроводящая атмосфера  $S_a$  и внешняя граница  $S_b$  — «переходный слой» к солнечному ветру (включая «нейтральный слой») (см., например, (5)). Уравнения их имеют вид

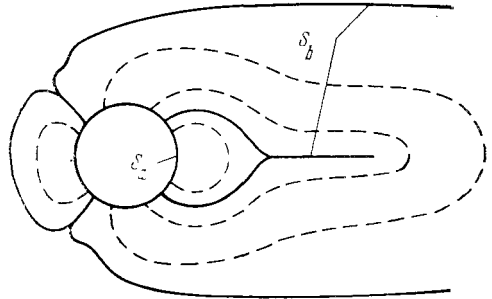


Рис. 1

$$S_a: x^2 = 1, \quad S_b: x^1 = f(x^2),$$

а граничные условия

$$(\text{rot } \Psi)^2|_{S_a} = 0, \quad (\text{rot } \Psi, n)|_{S_b} = F, \quad (5)$$

выражающие соответственно отсутствие токов в непроводящей и плотной атмосфере  $S_a$  и задание нормальной компоненты тока на границе переходной области  $S_b$ .

Таким образом, уравнения (4), (5) содержат следующие механизмы генерации электрических и токовых полей (для магнитосферы): 1) ионосферные ветры (скорости  $v$ ), 2) токи быстрых частиц  $j_0$ , 3) внешний ток из переходной области  $F$ . В дальнейшем для простоты изложения будем предполагать, что слоение имеет тот же топологический тип, что замкнутая модель магнитосферы, в частности, что каждая с.л. приходит на  $S_a$  два раза при  $x^2 = 1$ . На рис. 1 показан разрез магнитосферы вдоль полуденного меридиана. Сплошными линиями изображены переходный слой, нейтральный токовый слой и атмосфера, пунктиром — с.л.; масштаб нарушен.

2. В предположении (3) задача (4), (5) допускает упрощение, а именно асимптотическое разложение по параметру  $\sigma_{\perp} / \sigma_{\parallel}$ , члены которого нахо-

\* Мы пользуемся тензорной символикой:  $a_i$  — ковариантные и  $a^i$  — контравариантные компоненты вектора  $a$ ;  $g_{ik}$  — метрический тензор,  $g = \det \|g_{ik}\|$ ;  $\|g^{ik}\| = \|g_{ik}\|^{-1}$  и т. д. (см., например, (4)).

дятся из решения двумерных задач на базе  $D$  и одномерных квадратур вдоль с.л. Для получения разложения выпишем составляющие  $\hat{\sigma}$ :

$$\begin{aligned}\sigma^{11} &= \sigma_1 g^{11}, & \sigma^{12} &= \sigma_1 g^{12} + \sigma_2 \sqrt{g_{33}}/g, & \sigma^{13} &= \sigma_1 g^{13} - \sigma_2 g_{23}/\sqrt{g g_{33}}, \\ \sigma^{22} &= \sigma_1 g^{22}, & \sigma^{23} &= \sigma_1 g^{23} + \sigma_2 g_{13}/\sqrt{g g_{33}}, & \sigma^{33} &= \sigma_0/g_{33}\end{aligned}$$

(по  $\sigma_i$  тензор симметричен, по  $\sigma_2$  — кососимметричен); таким образом,  $\sigma^{33} \gg \sigma^{ij}$ ,  $(i, j) \neq (3, 3)$ .

Будем искать решения в виде рядов

$$\Phi = \Phi^0 + \Phi^1 + \dots, \quad \Psi_\alpha = \Psi_\alpha^0 + \Psi_\alpha^1 + \dots, \quad \alpha = 1, 2, \quad (6)$$

где  $\Phi^{n+1} \ll \Phi^n$ ,  $\Psi_\alpha^{n+1} \ll \Psi_\alpha^n$  по параметру  $\sigma_\perp/\sigma_\parallel$ .

Подставляя (6) в (4), получаем для нулевого приближения

$$\frac{\sigma_0}{g_{33}} \left( -\frac{\partial \Phi^0}{\partial x^3} \right) = 0, \quad \Phi^0 = \Phi(x^1, x^2),$$

где  $\Phi^0(x^\perp)$  определяется ниже как условие разрешимости уравнения первого приближения. Это и есть условие эквипотенциальности с.л.  $B_0$ . Потенциал  $\Phi^0$  есть, таким образом, функция на базе  $D$ . Имеем далее

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_0}{g_{33}} \left( -\frac{\partial \Phi^1}{\partial x_3} \right) &= -j_0^3 + \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial \Psi_2^0}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi_1^0}{\partial x_2} \right) \\ \sigma_1 g^{11} \left( -\frac{\partial \Phi^0}{\partial x^1} + E_{10} \right) &+ \left( \sigma_1 g^{12} - \sigma_2 \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \right) \left( -\frac{\partial \Phi^0}{\partial x^2} + E_{20} \right) = \\ &= -j_0^1 - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi_2^0}{\partial x^3},\end{aligned} \quad (7)$$

$$\left( \sigma_1 g^{12} + \sigma_2 \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \right) \left( -\frac{\partial \Phi^0}{\partial x_1} + E_{10} \right) + \sigma_1 g^{22} \left( -\frac{\partial \Phi^0}{\partial x_2} + E_{20} \right) = -j_0^2 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi_1^0}{\partial x^3}.$$

Граничное условие на  $S_a$  дает граничные значения для  $\Psi_\alpha^0$  при  $x^3 = \hat{1}$

$$\Psi_\alpha^0(x^\perp, 1) = -\frac{\partial F^\pm(x^\perp)}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (8)$$

где  $F^\pm(x^\perp)$  — две произвольные функции на базе  $D$ , отвечающие начальной и конечной точкам пересечения с.л. и  $S_a$ .

Решение двух последних уравнений (7) с условиями (8) существует лишь при определенной  $\Phi^0(x^\perp)$ , а именно при

$$\begin{aligned}\int \sqrt{g} dx^3 \{ j_0^2 + [\hat{\sigma}_\perp (-\text{grad } \Phi + E_0)]^2 \} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} \\ \int \sqrt{g} dx^3 \{ j_0^1 + [\hat{\sigma}_\perp (-\text{grad } \Phi + E_0)]^1 \} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x^2},\end{aligned} \quad (9)$$

где интегрирование проводится по всей с.л., а  $\Psi(x^\perp)$  — некоторая (иско-мая) функция на  $D$ .

Удобно записать (9) в виде, аналогичном (4):

$$\text{Rot } \Psi = -\hat{S} \text{Grad } \Phi^0 + J_1 + J_2, \quad (10)$$

где Rot, Grad (и в дальнейшем Div) — дифференциальные операторы на базе  $D$ ,

$$\hat{S} = \|S^{\alpha\beta}\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{G}} \int \sqrt{g} dx^3 \sigma^{\alpha\beta} \right\|; \quad J_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \int \sqrt{g} dx^3 j_{e\perp},$$

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \int \sqrt{g} dx^3 \hat{\sigma}_\perp E_0,$$

$J_1$  — усредненный ток быстрых частиц на базе,  $J_2$  — индуцированный внешним электрическим полем ток на базе. К уравнению (10) следует добавить граничные условия на проекциях атмосферы и внешней границы магнитосферы на базу, получающиеся из (5):

$$\Psi|_{x^1=g(x^2)}=0, \quad \Psi|_{x^1=f(x^2)}=\bar{F}(x^2) \quad (11)$$

(подробнее см. (3, 6)).

Функция  $\Psi$ , очевидно, имеет простой физический смысл: это функция тока на базе (или, что то же, функция тока частиц, заполняющих трубки с.л.). Двумерная система (10) является естественным обобщением системы Коши — Римана (неоднородной), которая получается из нее, когда  $x^1, x^2$  — декартовы, а  $\hat{S}$  — единичная матрица.

Функцию  $\Psi$  из (10) можно исключить и получить для  $\Phi^0$  уравнение второго порядка (1-3)

$$\text{Div } \hat{S} \text{ Grad } \Phi^0 = Q$$

с граничными условиями, получающимися из (11).

3. Для дальнейшего исследования задачи (10), (11) нужно рассмотреть конкретную геометрию слоения; особый интерес при этом представляет область касания с.л. с границей  $S_a$ . Для магнитосферы Земли эта область находится на геомагнитном экваторе, и изучение решения (10), (11) вблизи него позволяет выявить особенность, приводящую к возникновению токовой экваториальной струи (7, 8). С другой стороны, вблизи  $x^1=f(x^2)$  уравнение (10) тоже допускает упрощенное рассмотрение — это область полярного овала и полярной электроструи (6).

Автор благодарен А. В. Гуревичу за постановку задачи и замечания.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
21 XI 1973

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> D. B. Chang, L. D. Pearlstein, M. N. Rosenbluth, J. Geophys. Res., v. 70, 3085 (1965). <sup>2</sup> А. В. Гуревич, Е. Е. Цедиллина, Геомагнетизм и аэронаука, т. 9, 458, 642, 818 (1969). <sup>3</sup> А. Л. Крылов, В. П. Щербаков, там же, т. 12, № 2, 248 (1972). <sup>4</sup> Л. С. Соловьев, В. Д. Шаfranов, Вопросы теории плазмы, в. 5, М., 1967. <sup>5</sup> В. Хесс, Радиационный пояс и магнитосфера, 1972. <sup>6</sup> А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Геомагнетизм и аэронаука, т. 14, № 2 (1974). <sup>7</sup> А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, В. П. Щербаков, там же, т. 12, № 3 (1972).