Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 2

УДК 513.88 : 517.948.3

МАТЕМАТИКА

Р. В. ДУДУЧАВА

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В СВЕРТКАХ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 21 III 1974)

Предпринимается попытка объединить теорию парных интегральных операторов в свертках с разрывными символами (см. ([1])) с теорией сингулярных интегральных операторов с разрывными коэффициентами (см. ([2], [3]) и др.) в одномерном случае.

1°. Всюду в настоящей заметке будем придерживаться обозначений из ([1]). Алгебру функций, полученных замыканием алгебры кусочно-постоянных функций с конечным числом точек разрыва на $R=(-\infty, \infty)$ по норме $\|a\|_p=\|\widetilde{W}_a\|_{L_p(R)}$, будем обозначать через $\Pi C_p(R)$, $1<p<\infty$. Классы функции $\Pi\mathfrak{K}_p(R)$ и $\mathfrak{N}_p(R)$, рассмотренные в ([1]), являются подмножествами алгебры $\Pi C_p(R)$. Алгебра $\Pi C_2(R)$ совпадает при этом с алгеброй функций $a(t)$, имеющих пределы $a(t\pm 0)$ в каждой точке $t\in\overline{R}=R\cup\{\infty\}$, и эту алгебру будем обозначать также через $\Pi C(R)$. Алгебру функций, принимающих постоянные значения на полуосях $R^+=[0, \infty)$ и $R^-=(-\infty, 0]$ (положительно однородные функции) будем обозначать через $H(R)$.

Пусть I — единичный (тождественный) оператор.

В заметке исследуется вопрос нётеровости и индекса в пространстве $L_p(R)$, $1<p<\infty$, интегральных операторов вида

$$A=\sum_{j=1}^{n} a_j\widetilde{W}_{b_j}c_jI \tag{1}$$

в предположениях $a_j(t)$, $c_j(t)\in\Pi C(R)$, $b_j(t)\in\Pi C_p(R)$, а также при некоторых других предположениях. Если, в частности, $b_j(t)\in\Pi\mathfrak{K}_p(R)$, то оператор A принимает вид (см. ([1]))

$$(A\varphi)(t)=\sum_{j=1}^{n}\left[\beta_j a_j(t)c_j(t)\varphi(t)+\int_{-\infty}^{\infty}a_j(t)c_j(\tau)k_j(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right].$$

Если в (1) положить $a_j(t)\in H(R)$ и $c_j(t)=\mathrm{const}$, либо наоборот, то A совпадает с парным интегральным оператором в свертках с разрывным символом (см. ([1])). Если же положить $b_j(t)\in H(R)$, то (1) совпадает с сингулярным интегральным оператором с коэффициентами из * $\Pi C(R)$ (см. ([2])). Следует при этом отметить, что в отличие от операторов, исследованных ([1], [2]), символ оператора (1) является парой матриц-функций второго порядка.

Операторы вида (1) в случае непрерывности функций $b_j(t)$ исследовались ранее в ([4], [5]); но в отличие от операторов (1) все операторы, исследованные в этих работах, за исключением операторов, рассмотренных в § 3 работы ([5]) (см. замечание к теореме 3), отличаются от парных операторов с непрерывными символами на вполне непрерывные операторы.

При наших исследованиях мы существенно опирались на локальный принцип, предложенный в ([6]), гл. XII, § 1.

Все предложения настоящей заметки без особого труда переносятся на случай, когда $a_j(t)$, $b_j(t)$ и $c_j(t)$ — квадратичные матрицы-функции.

---

* В ([2]), а также в ([3]) не рассматривался случай, когда контур совпадает с прямой R, но все исследования легко переносятся на этот случай (см. ([6])).

2°. Класс измеримых ограниченных функций $a(t)$, имеющих конечные пределы $a^{\pm}=\lim\limits_{t\to\pm\infty} a(t)$, обозначим через $M(R)$.

Через $\mathfrak{S}(L_p(R))$ будем обозначать алгебру вполне непрерывных операторов в пространстве $L_p(R)$ и пусть $|||A|||_p=\inf\limits_T\|A+T\|_{L_p(R)}$, $T\in\mathfrak{S}(L_p(R))$.

Условимся также в обозначениях $a^{\pm}=\lim\limits_{t\to\pm\infty} a(t)$, $a^\infty(t)=a_+\chi_+(t)+a^-[1-$ $-\chi^+(t)]$, где $\chi^+(t)$ — характеристическая функция полуоси $R^+=[0, \infty]$.

Если $d(t)\in\Pi C(R)$, то пусть $d_p(t, x)=d(t-0)[1-g_p(x)]+d(t+0)g_p(x)$, $t\in\bar{R}=R\cup\{\infty\}$; $0\leqslant x\leqslant 1$, где функция $g_p(x)$ определяется равенством (2) из ([1]); при этом считаем $d(\infty-0)=d^-$ и $d(\infty+0)=d^+$; пусть $\tilde{d}_p(t, x)=$ $=\sqrt{g_p(x)[1-g_p(x)]}[d(t+0)-d(t-0)]$ и

$$\mathcal{D}_p(t, x)=\begin{Vmatrix} d_p(t, x) & \tilde{d}_p(t, x) \\ \tilde{d}_p(t, x) & d_p(t, x)\end{Vmatrix}, \quad V=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{Vmatrix}$$

С и м в о л о м оператора A вида (1), где $a_j(t)$, $c_j(t)\in\Pi C(R)$ и $b_j(t)\in$ $\in\Pi C_p(R)$, $1<p<\infty$, будем называть пару матриц-функций второго порядка $A_p(t, x)=(\mathcal{A}_p^s(t, x); \mathcal{A}_p^c(t, x))$, $t\in\bar{R}$; $0\leqslant x\leqslant 1$, в котором

$$\mathcal{A}_p^s(t, x)=(\mathcal{D}_0)_q(t, x)+\sum_{j=1}^n(\mathcal{D}_j)_q(t, x)\cdot V\cdot(\mathcal{C}_j)_q(t, x), \quad q=p/(p-1),$$

$$d_0(t)=\sum_{j=1}^n(b_j^++b_j^-)a_j(t)c_j(t)/2, \quad d_j(t)=(b_j^++b_j^-)a_j(t)/2,$$

$$\mathcal{A}_p^c(t, x)=\begin{Vmatrix} e_p'(t, x) & \tilde{e}_p''(t, x) \\ \tilde{e}_p'''(t, x) & e_p^{\mathrm{IV}}(t, x)\end{Vmatrix};$$

здесь

$$e'(t)=\sum_{j=1}^n a_j^+c_j^+b_j(t), \quad e''(t)=\sum_{j=1}^n a_j^+c_j^-b_j(t),$$

$$e'''(t)=\sum_{j=1}^n a_j^-c_j^+b_j(t), \quad e^{\mathrm{IV}}(t)=\sum_{j=1}^n a_j^-c_j^-b_j(t).$$

Нетрудно проверить что $\mathcal{A}_p^s(t, x)$ совпадает с символом сингулярного интегрального оператора (см. ([2]))

$$(A^s\varphi)(t)=\sum_{j=1}^n(a_jW_{b_j^\infty}c_j\varphi)(t)=d_0(t)\varphi(t)+\sum_{j=1}^n\frac{d_j(t)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_j(\tau)\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

а $\mathcal{A}_p^s(t, x)$ — символ парного интегрального оператора в свертках (см. ([1]))

$$A^c=\sum_{j=1}^n a_j^\infty W_{b_j}c_jI=PW_{e'}P+PW_{e''}Q+QW_{e'''}P+QW_{e^{\mathrm{IV}}}Q,$$

где $Q=I-P$ и P — оператор умножения на характеристическую функцию полуоси $R^+=[0, \infty)$.

Доказывается, что между оператором A вида (1) и его символом $A_p(t, x)=(\|a_{jk}^s(t, x)\|_{j,k=1}^2; \|a_{jk}^c(t, x)\|_{j,k=1}^2)$ имеет место соотношение

$$\max_{j,k}\sup_{t,x}\{|a_{jk}^s(t, x)|, |a_{jk}^c(t, x)|\}\leqslant c_p|||A|||_p, \tag{2}$$

где c_p — постоянная, не зависящая от оператора A.

3°. Обозначим через $\mathfrak{R}(L_p(R))$, $1<p<\infty$, замыкание линейного множества операторов вида (1), в котором $a_j(t)$, $c_j(t)\in\Pi C(R)$, $b_j(t)\in\Pi C_p(R)$. Если теперь $A=\lim\limits_{k\to\infty} A_k$, где A_k — операторы вида (1), то последовательность символов $\{(A_k)_p(t, x)\}_{k=1}^{\infty}$ в силу соотношения (2) имеет предел $A_p(t,x)$, который назовем символом оператора A $(\in\mathfrak{R}(L_p(R))$. Очевидно, что символы операторов из множества $\mathfrak{R}(L_p(R))$ определяются однозначно.

Теорема 1. *Для того чтобы оператор A из множества $\mathfrak{R}(L_p(R))$, $1<p<\infty$, был Φ_+- или Φ_--оператором в пространстве $L_p(R)$, необходимо, чтобы его символ $A_p(t, x)=(\mathscr{A}_p{}^s(t, x); \mathscr{A}_p{}^c(t, x))$ удовлетворял условию*

$$\inf|\det[\mathscr{A}_p{}^s(t,x)\cdot\mathscr{A}_p{}^c(t,x)]|>0,\quad t\in R;\quad 0\leqslant x\leqslant 1;$$

если при этом

$$\inf|\det[\mathscr{A}_p{}^s(\infty,x)\cdot A_p{}^c(\infty,x)]|>0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

то A является Φ-оператором в пространстве $L_p(R)$.

4°. Через $\mathfrak{A}_0(L_p(R))$ обозначим алгебру операторов вида

$$A=\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{m=1}^{n} a_{j1m}W_{b_{j1m}}\right)\ldots\left(\sum_{m=1}^{n} a_{jrm}W_{b_{jrm}}\right), \tag{3}$$

где $a_{jkm}(t)\in\Pi C(R)$, $b_{jkm}(t)\in\Pi C_p(R)$; оператору A сопоставим символ

$$A_p(t,x)=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}(\mathscr{A}_{j1})_p{}^s(t,x)\ldots(\mathscr{A}_{jr})_p{}^s(t,x);\ \sum_{j=1}^{n}(\mathscr{A}_{j1})_p{}^c(t,x)\ldots(\mathscr{A}_{jr})_p{}^s(t,x)\right),$$

где $((\mathscr{A}_{jk})_p{}^s(t, x);\ (\mathscr{A}_{jk})_p{}^c(t, x))$ — символ оператора $A_{jk}=\sum\limits_{m=1}^{n} a_{jkm}W_{b/km}$.

Оператору (3) сопоставим оператор $A_\infty=\sum\limits_{j=1}^{n}(A_{j1})_\infty\ldots(A_{jr})_\infty$, где $(A_{jk})_\infty=\sum\limits_{m=1}^{n} a^{\infty}_{jk_m} W_{b/km}$.

Через M_∞ обозначим множество операторов вида $B=\chi_u W_\psi$, где $\chi_u(t)$ — характеристическая функция окрестности бесконечно удаленной точки $u=\{t\colon |t|>\mu\}$, а $\psi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице, в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $|\psi(t)|\leqslant 1$.

Пусть теперь $\overline{\mathfrak{A}}_0(L_p(R))$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}_0(L_p(R))$, $1<p<\infty$, удовлетворяющая условию

$$|||A_\infty|||_p\leqslant c_p|||AB|||_p, \tag{4}$$

где постоянная c_p зависит только от p для любых $A\in\overline{\mathfrak{A}}_0(L_p(R))$ и $B\in M_\infty$.

Доказывается, что произвольный оператор A из алгебры $\overline{\mathfrak{A}}_0(L_p(R))$ и его символ $A_p(t,x)$ удовлетворяют соотношениям (2); следовательно, символ оператора $A(\in\overline{\mathfrak{A}}_0(L_p(R)))$ не зависит от представления этого оператора в виде (3); при этом, как отмечалось выше, каждому оператору из замыкания $\overline{\mathfrak{A}}(L_p(R))$ алгебры $\overline{\mathfrak{A}}_0(L_p(R))$ однозначно сопоставляется символ $A_p(t,x)=(\mathscr{A}_p{}^1(t\ x);\ \mathscr{A}_p{}^2(t,x))$.

Теорема 2. *Для того чтобы оператор A из алгебры $\overline{\mathfrak{A}}(L_p(R))$, $1<p<\infty$, был Φ-оператором, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\inf|\det\mathscr{A}_p{}^k(t,x)|>0$, $t\in\overline{R}$; $0\leqslant x\leqslant 1$, $k=1, 2$.

Если условие выполнено и $\mathscr{A}_p^k(t,\ x)=\|a_{jm}^k(t,\ x)\|_j^2$, $m=1$, *то*

$$\operatorname{Ind} A=-\sum_{k=1} \operatorname{ind}[\det \mathscr{A}_p^k(t,x)/a_{22}^k(t,0)\,a_{22}(t,1)]. \tag{5}$$

З а м е ч а н и е. Условиям (4) удовлетворяют операторы из алгебр, порожденных операторами (3), где $\bar{a}_{jkm}=\overset{+}{a}_{jkm}$ либо $\bar{b}_{jkm}=\overset{+}{b}_{jkm}$, $j=1, 2, \ldots, l$; $k=1, 2, \ldots, r$; $m=1, 2, \ldots, n$.

5°. С помощью результатов И. Б. Симоненко ([3]) можно получить следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $A=\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \overline{W}_{b}$, *где* $a_j(t)\in\widetilde{M}(R)$, $b_j(t)\in\Pi C_p(R)$, $1<p<\infty$, *и выполнены следующие условия:*

1) $\inf\left|\sum\limits_{j=1} b_j^+ a_j(t)\right|>0, \quad t\in R;$

2) *функция* $g(t)=[\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^- a_j(t)][\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^+ a_j(t)]^{-1}$ *принадлежит классу* * $A_p(R)$;

3) *символ* $\mathscr{A}_p^c(t,\ x)=\|a_{jk}^c(t,\ x)\|_{j,k=1}^2$ *интегрального оператора в свертках* $A^c=P\overline{W}_{b_+}+Q\overline{W}_{b_-}$, *где* $b_+(t)=\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^+ b_j(t)$, $b_-(t)=\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^- b_j(t)$, *удовлетворяет условию* $\inf|\det \mathscr{A}_p^c(t,x)|>0$, $t\in\overline{R}$; $0\leqslant x\leqslant 1$.

Тогда A является Ф-оператором в пространстве $L_p(R)$.

Если при этом $a_j^+=a_j^-$, $j=1,\ 2, \ldots, n$, *то* $\operatorname{Ind} A=\operatorname{ind} g$, *а если* $b_j^+=b_j^-$, $j=1,\ 2, \ldots, n$, *то* $\operatorname{Ind} A$ *определяется равенством* (5), *в котором* $\mathscr{A}_p^2(t,\ x)\equiv 1$.

З а м е ч а н и е. Основная теорема § 3 работы ([5]) является следствием теоремы 3.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
15 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Р. В. Дудучава*, ДАН, т. 211, № 2, 277 (1973). [2] *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 35, в. 4, 940 (1971). [3] *И. Б. Симоненко*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, в. 2, 277 (1964). [4] *Л. С. Раковщик*, УМН, т. 18, в. 4, 171 (1963). [5] *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко*, Изв. АН АрмССР, матем., т. 8, № 1, 26 (1973). [6] *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник*, Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Кишинев, 1973.

* Определение класса $A_p(R)$ и индекса $\operatorname{ind} g$ функции $g(t)$ из этого класса см. в ([3]).