Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 2

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

А. В. ЕФИМОВ, А. Ф. КАРАКУЛИН

О КОНТИНУАЛЬНОМ АНАЛОГЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком С. М. Никольским 26 II 1974)

1. Файном [1] в 1950 г. был предложен континуальный аналог системы Уолша, включающий несчетное множество функций $W(y, x)$, $y\in\in(-\infty, \infty)$, каждая из которых определена па всей действительной оси $x\in(-\infty, \infty)$. Одповременно было введено в рассмотрение соответствующее интегральное преобразование, аналогичное классическому преобразованию Фурье. Несколько позже Н. Я. Виленкин [2] рассмотрел общую теорию интеграла Фурье на топологических группах.

Система функций Уолша является частным случаем более общих периодических мультипликативных ортонормированных систем, рассмотренных в работах [3–6] и других. Дадим обобщение таких систем и покажем, что реализация соответствующего им дискретного преобразования допускает алгоритм убыстрения, аналогичный алгоритму быстрого преобразования Фурье [7].

2. Напомним прежде всего определение периодической мультипликативной ортонормированной системы $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, приведенное в [6].

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность целых (не обязательно различных) чисел, больших или равных 2, и пусть $m_0=1$, $m_n=p_nm_{n-1}$, $n=1, 2, \ldots$ Тогда любое вещественное число $x\in[0, 1)$ может быть представлено в виде $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n/m_n)$, где x_n — целые числа, $x_n=[xm_n]\,(\mathrm{mod}\,p_n)$, $0\leqslant x_n\leqslant p_n-1$ (через $[a]$ обозначается целая часть числа a).

В свою очередь, для любого целого положительного числа имеем

$$k=\sum_{n=1}^{s(k)}k_nm_{n-1},\qquad s(k)\geqslant1,$$

где k_n — целые числа, $k_n\equiv[k/m_{n-1}]\,(\mathrm{mod}\,p_n)$, $0\leqslant k_n\leqslant p_n-1$, $n=1, 2, \ldots, s(k)$.

Функции мультипликативной системы $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ определяются теперь с помощью равенства

$$\chi_0(x)=1,\qquad \chi_k(x)=\exp\left(2\pi i\sum_{n=1}^{s(k)}\frac{k_nx_n}{p_n}\right),\qquad k=1,2,\ldots \tag{1}$$

Функции $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ образуют полную ортонормированную на $[0, 1]$ систему, которая при $p_n=2$, $n=1, 2, \ldots$, совпадает с системой Уолша в нумерации Пэли, а при $p_n=p\neq2$, $n=1, 2, \ldots$,— с системой Крестенсона — Леви (см., например, [6]).

Обобщение Файном системы Уолша $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ опиралось на тот факт, что для этой системы справедливо соотношение

$$W_{2^n}(x)=W_1(\{2^nx\}),\qquad n=1, 2, \ldots,$$

где $\{a\}$ — дробная часть числа a [1]. Аналогичное соотношение справедливо и в более общем случае систем Крестенсона — Леви, однако оно нарушается, вообще говоря, в том случае, когда среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ имеются неравные. Таким образом, предложенный Файном метод обобщения функций Уолша $W_k(x)$, $k=0, 1, \ldots, x\in[0, 1]$, на случай непрерывного изменения параметра k и всех $x\in[0, \infty)$ может быть использован только для систем Крестенсона — Леви и неприменим для произвольных мультипликативных систем. Поэтому для построения континуального аналога системы (1) поступим следующим образом.

По заданной последовательности оснований $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ построим дополнительную последовательность $p_{-1}, p_{-2}, \ldots, p_{-n}, \ldots$, полагая $p_{-n}=p_n$, $n=1, 2, \ldots$. Тогда всякому вещественному числу $x\in[0, \infty)$ может быть поставлена в соответствие последовательность $(\ldots, 0, x_{-s(x)}, \ldots, x_{-1}, x_1, \ldots \ldots, x_n, \ldots)$, где целые числа x_n, $n=\pm1, \pm2, \ldots$, определяются соотношениями

$$x_n\equiv[xm_n]\,(\mathrm{mod}\, p_n), \qquad x_{-n}\equiv\left[\frac{x}{m_{n-1}}\right](\mathrm{mod}\, p_n), \qquad n=1, 2, \ldots,$$

и представляют собой позиционные координаты числа x по выбранной системе оснований. При этом справедливо равенство

$$x=x_{-s(x)}m_{s(x)-1}+\ldots+x_{-2}m_1+x_{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{m_n}.$$

Функции $\chi_y(x)=\chi(y, x)$ для производных x и y определим теперь следующим образом.

а) При $p_n\neq2$, $n=1, 2, \ldots$, и $x>0$, $y>0$

$$\chi(y, x)=\chi(x, y)=\exp\left(2\pi i\sum_{n=1}^{\max[s(x), s(y)]}\frac{x_{-n}y_n+x_ny_{-n}}{p_n}\right),$$

$$\chi(-y, x)=\chi(y, -x)=\overline{\chi(y, x)}, \qquad \chi(-y, -x)=\chi(y, x). \tag{2}$$

б) Если среди оснований $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ числа $p_{n_1}=p_{n_2}=\ldots=2$, то при определении функций $\chi(y, x)$ для отрицательных x (или y) множители

$$\exp\left(2\pi i\frac{(-x)_{-n_\nu}y_{n_\nu}+(-x)_{n_\nu}y_{-n_\nu}}{2}\right)=(-1)^{(-x)_{-n_\nu}y_{n_\nu}+(-x)_{n_\nu}y_{-n_\nu}}, \quad \nu=1, 2, \ldots,$$

следует заменить множителями $(-1)^{\bar{x}_{-n_\nu}y_{n_\nu}+\bar{x}_{n_\nu}y_{-n_\nu}}$, где $\bar{x}_{n_\nu}=1-(-x)_{n_\nu}$.

Введенная таким образом система функций $\{\chi(y, x)\}$, $y, x\in(-\infty, \infty)$, содержит в качестве своего счетного подмножества (при сужении на интервал $[0, 1]$ систему функций (1), а при $p_n=2$, $n=1, 2, \ldots$, совпадает с системой обобщенных функций Уолша, построенной в ([1]).

Отметим следующие свойства системы $\{\chi(y, x)\}$, $y, x\in(-\infty, \infty)$.

а) При любых $y, x, t>0$

$$\chi(y, x)\chi(y, t)=\chi(y, x\dot{+}t), \qquad \chi(y, x)\overline{\chi(y, t)}=\chi(y, x\dot{-}t),$$

где операция $\dot{-}$ обратна операции $\dot{+}$, а последняя определяется следующим образом:

$$x\dot{+}t=\sum_{n=1}^{\max[s(x), s(t)]}(x_{-n}+t_{-n})\,(\mathrm{mod}\, p_n)\cdot m_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n+t_n)\,(\mathrm{mod}\, p_n)}{m_n}.$$

Это свойство означает, что функции $\chi(y, x)$ при $y, x>0$ являются характерами аддитивной локально-компактной группы, состоящей из всевозможных бесконечных последовательностей целых чисел вида $(\ldots, 0, x_{-s}, x_{-s+1}, \ldots, x_{-1}, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ с покоординатным модульным сложением и умножением элементов.

б) Из (2) следует, что для произвольного $y>0$ и всех $0 \leqslant x \leqslant m_s$, где s — некоторое фиксированное число, справедливо соотношение

$$\chi(y, x) = \exp(2\pi i x_{-s} y_s / p_s) \cdot \chi(y, x - x_{-s} m_s).$$

Полагая здесь последовательно $s=1, 2, \ldots$, получим в общем случае бесконечную систему соотношений, рекуррентно определяющую функцию $\chi(y, x)$ при фиксированном $y>0$ на всей действительной полуоси, исходя из значений, принимаемых этой функцией на интервале $[0, 1]$. Если параметр y есть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — рациональное число вида

$$y = \sum_{n=1}^{s_1} y_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{s_2} \frac{y_n}{m_n},$$

то $\chi(y, x)$ оказывается периодической функцией с периодом m_{s_1}, принимающей значения в множестве корней степени $\max(s_1, s_2)$ из единицы. В частности, при целочисленном $y=k$ (т. е. $s_2=0$) функция $\chi(k, x)$ получается из функции $\chi_k(x)$, $x \in [0, 1]$, определенной в (1), периодическим продолжением с периодом 1.

3. Интегральное преобразование, соответствующее введенной выше системе $\{\chi(y, x)\}$, $y, x \in (-\infty, \infty)$, практически реализуется на ЦВМ в форме дискретного преобразования вида

$$Y_{n'} = \sum_{n=0}^{N-1} W(n', n) X_n, \qquad n'=0, 1, \ldots, N-1, \tag{3}$$

с матрицей

$$W(n', n) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^{s} \frac{n_k' n_k}{p_k}\right),$$

где $N = p_1 p_2 \ldots p_s = m_s$, а n_k и n_k', $k=1, 2, \ldots, s$, — позиционные координаты целых чисел n и n' соответственно по системе оснований $p_1, p_2, \ldots p_s$, т. е. $n = n_1 + n_2 m_1 + \ldots + n_s m_{s-1}$ и $n' = n_1' + n_2' m_1 + \ldots + n_s' m_{s-1}$.

Вычисление координат результирующего вектора $Y_{n'}$, $n'=0, 1, \ldots, N-1$, непосредственно по формуле (3) требует в общем случае N^2 арифметических операций (под арифметической операцией здесь понимается умножение на комплексное число и ассоциированное с ним последующее сложение). Возможен, однако, алгоритм, аналогичный алгоритму быстрого преобразования Фурье (БПФ), который позволяет значительно сократить количество необходимых арифметических операций (подробно о БПФ и его аналогах см., например, ([7], [8])).

Сущность «быстрого» алгоритма состоит в том, что матрица преобразования $W(n', n)$ порядка $N \times N$ при $N = p_1 p_2 \ldots p_s$ представляется в виде произведения s матриц такого же порядка $W = W^{(s)} W^{(s-1)} \ldots W^{(1)}$, каждая из которых обладает специальным свойством минимизации количества операций. В рассматриваемом случае матрицы $W^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots, s$, имеют вид

$$W^{(k)}(n', n) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p_k} n_k' n_k\right) \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}} \delta_{n_l', n_l}, \qquad k=1, 2, \ldots, s$$

($\delta_{\nu, \mu}$ — символ Кронекера), так что каждая строка $W^{(k)}(n', n)$ имеет лишь p_k ненулевых элементов.

Факторизация матрицы $W(n', n)$ позволяет организовать вычислительный процесс рекуррентным способом в s этапов, а поскольку число операций на k-м этапе равно Np_k, то полное число операций составляет $N\sum_{k=1}^{s} p_k$ (вместо N^2 при вычислении прямым методом).

Отметим, что в отличие от БПФ, в рассматриваемом случае при $p_1 = p_2 = \ldots = p_s = p$ вычисления на каждом из s этапов могут производиться параллельно на s независимых процессорах, что приведет к дополнительному сокращению машинного времени.

Московский институт электронной техники

Поступило
8 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *N. J. Fine*, Trans. Am. Math. Soc., v. 69, 66 (1950). [2] *Н. Я. Виленкин*, Матем. сборн., т. 30 (72), № 2, 233 (1952). [3] *H. E. Chrestenson*, Pacific. J. Math., v. 5, 17 (1955). [4] *P. Levy*, Comment. math. helv., v. 16, 146 (1944). [5] *Н. Я. Виленкин*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 11, 363 (1948). [6] *А. В. Ефимов*, Матем. сборн., т. 30, 354 (1966). [7] *J. W. Cooley, J. W. Tukey*, Math. of Comput., v. 19, 297 (1965). [8] *H. Harmuth*, Transmission of Information by Orthogonal Functions, Berlin, 1972.