

В. П. МАЛЫХИН

## О РАЗЛОЖИМЫХ И МАКСИМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком И. С. Александровым 22 III 1974)

Основным результатом работы является построение (см. п. 4) регулярного максимального пространства любого дисперсионного характера (при естественных теоретико-множественных предположениях, совместимых с системой аксиом ZF). Этим решена известная задача Катетова, поставленная им в 1950 г. (<sup>1</sup>). Получены также некоторые результаты относительно разложимых пространств, в частности, показано (см. п. 3), что существование измеримого кардинала влечет существование экстремально-несвязной, отделимой, не максимально-разложимой группы.

1. О разложимых пространствах, их строении, критериях разложимости и максимальной разложимости см. в (<sup>1</sup>, <sup>8</sup>, <sup>11</sup>). Все пространства (если явно не оговорено обратное) плотны в себе. Под максимальными понимаются (плотные в себя) пространства с топологией, для которой не существует строго большей топологии (опять же без изолированных точек). Кажется более логичным называть такие пространства именно максимальными, а не минимальными, как в (<sup>3</sup>, <sup>8</sup>, <sup>11</sup>). Под дисперсионным характером системы  $\tau$  подмножеств множества  $X$  понимаем  $\Delta\tau = \min\{|A| : A \in \tau\}$ .

Окрестность точки не обязательно открытое множество, регулярное пространство не обязательно  $T_1$ .

2. Определение. Пространство  $X$  называется наследственно-разложимым, если всякое плотное в себе подпространство из  $X$  разложимо.

Теорема 1. Существует наследственно-разложимое, не максимально-разложимое  $T_1$ -пространство любого дисперсионного характера  $m$ .

Доказательство. Если  $\Phi$  — фильтр на множестве  $X$ , то  $\Phi^* = \bigcap \{[A]_{\beta X_d} : A \in \Phi\}$  есть замкнутое подпространство из  $\beta X_d^*$ . Наоборот, если  $\Phi^*$  замкнуто в  $\beta X_d$ , то  $\Phi = \{A : A \subset X, [A]_{\beta X_d} \supset \Phi^*\}$  есть фильтр на множестве  $X$ . Итак, фильтр  $\Phi$  на множестве  $X$  и замкнутое множество  $\Phi^*$  из  $\beta X_d$  канонически определяют друг друга.

Пусть  $R$  — счетное максимальное хаусдорфово пространство (о существовании таких пространств см. (<sup>3</sup>, <sup>4</sup>)), а  $\bar{R}$  — пространство сопутствующих ультрафильтров (см. далее п. 5). Тогда  $\Phi^* = [\bar{R}]_{\beta R_d}$  — плотное в себе, сепарабельное, замкнутое подпространство  $\beta R_d \setminus R_d$ . Теперь мы можем для любого множества  $X$  мощности  $m > \aleph_0$  построить в  $\beta X_d \setminus X_d$  замкнутое, сепарабельное, плотное в себе подпространство  $F_m^*$  и притом такое, что  $\Delta(F_m^*) = m$ , где  $F_m^*$  — фильтр на множестве  $X$ , определенный замкнутым множеством  $F_m^*$ . Пусть  $\tau = F_m^* \cup \{\Lambda\}$ , тогда  $\tau$  — топология, а  $(X, \tau)$  — плотное в себе  $T_1$ -пространство дисперсионного характера  $m$ , наследственно-разложимое, но не более чем счетно-разложимое, т. е. и не максимально-разложимое, ибо  $\Delta\tau = m > \aleph_0$ .

Конструкция данного примера допускает естественное обобщение на высшие кардиналы.

3. Пусть  $\omega(X) = \{A : A \subset X, |A| < \aleph_0\}$ . Превратим  $\omega(X)$  в абелеву группу, положив  $A+B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Определим топологию  $\tau$ , превращающую

\* Индекс  $d$  внизу означает переход к дискретному пространству.

щую  $\omega(X)$  в отделимую топологическую группу, заданием фильтра окрестностей  $0$ , роль которого играет пустое множество  $\Lambda$ . (Такая топология рассматривалась в <sup>(6)</sup>.) Пусть  $\xi$  — произвольный свободный фильтр на множестве  $X$  и  $R \in \xi$ . Тогда  $V(R) = \{A: A \subset R, A \in \omega(X)\}$  — окрестность точки  $\Lambda$ .

1) Определение. Система  $\Omega = \{M\}$  подмножеств пространства  $(X, \tau)$  называется плотной в  $(X, \tau)$ , если для всякого  $P \in \tau$  существует  $M \in \Omega$  и  $M \subset P$  (см. <sup>(5)</sup>).

Если  $|\Omega| = |M| = \Delta \tau$  для всякого  $M$  из  $\Omega$ , то такую систему  $\Omega$  назовем  $\pi$ -системой.

Предложение 1. Пусть  $(\omega(X), \xi)$  — группа  $\omega(X)$ , топологизированная свободным фильтром  $\xi$ . Тогда:

- 1)  $(\omega(X), \xi)$  — наследственно-разложимое пространство\*.
- 2) Если  $\xi$  — ультрафильтр, то  $(\omega(X), \xi)$  не имеет  $\pi$ -системы.
- 3) Если  $\xi$  имеет счетную базу, то  $(\omega(X), \xi)$  метризуемо.

Из 3) вытекает, что существуют метризуемые группы любого дисперсионного характера. Каждая такая группа, очевидно, наследственно максимально-разложима и наследственно нормальна (см. также <sup>(12)</sup>).

В силу известной леммы Куратовского <sup>(7)</sup> всякая топология, имеющая  $\pi$ -систему, максимально-разложима <sup>(8)</sup>. Однако, если  $|X| = \aleph_0$  и  $\xi$  — ультрафильтр, то  $(\omega(X), \xi)$  наследственно максимально-разложимое пространство, не имеющее в силу 2)  $\pi$ -системы.

2) Пусть  $MC$  означает: «существует измеримый кардинал». Тогда  $MC$  влечет существование отделимой, не максимально-разложимой, но наследственно-разложимой группы.

Нам необходим следующий факт (см., например, <sup>(9)</sup>). Впервые его получил Rowbottom.

(Rw).  $MC$  влечет существование счетно-центрированного свободного ультрафильтра  $\xi$  на некотором множестве  $X$  со следующим свойством.

Пусть  $f: \omega(X) \rightarrow \{0, 1\}$ . Тогда существует такое  $K \in \xi$ , что  $|f(K^{[n]})| = 1$  для всякого  $n < \omega_0$ . Здесь  $K^{[n]} = \{A \subset K: |A| = n\}$ .

Рассмотрим группу  $\omega(X)$ , топологизированную с помощью такого ультрафильтра  $\xi$ . Пусть  $F_1$  — фильтр «выколотых» (т. е. без точки  $\Lambda$ ) окрестностей точки  $\Lambda$  в  $\omega(X)$ , а  $\xi_n$  — сужение его на множество  $X^{[n]} = \{A \in \omega(X): |A| = n\}$ , где  $n > 0$ . В силу выбора специального ультрафильтра  $\xi$  каждый фильтр  $\xi_n$  — ультрафильтр и  $F_1 = \{\xi_n: n = 1, 2, \dots\}$   $_{\mathcal{B}(\omega(X))d}$ . Отсюда следует, что  $\omega(X)$  не более чем счетно-разложимо, а потому не максимально-разложимо, так как дисперсионный характер топологии несчетен.

Отметим без доказательства интересное свойство этой группы. Если  $V$  открытое, не замкнутое множество в  $\omega(X)$ , то существует некоторая точка  $x$  такая, что  $x \in [V] \setminus V$ , но  $V \cup \{x\}$  открыто. Это влечет экстремальную несвязность группы  $\omega(X)$ .

4. Определение. Топологию  $\tau$  на множестве  $X$  назовем  $II(PI)$ -топологией, если  $\tau$  — (регулярная) топология без изолированных точек, мощность базы и дисперсионный характер которой равны  $|X| (=m)$ .

Предложение 2. Для всякой  $II$ -топологии  $\tau$  на множестве  $X$  существует  $PI$ -топология  $\tilde{\tau}$  большая, чем  $\tau$ .

Доказательство. Пусть  $f$  — взаимно однозначное соответствие между множеством  $T = \{\alpha: \alpha < \omega(m)\}$  \*\* и его квадратом. Будем называть  $f((\alpha, \beta))$  номером пары  $(\alpha, \beta)$ . Опишем общий шаг построения. Пусть уже построены  $II$ -топологии  $\tau_\gamma$  для каждого  $\gamma < \varepsilon < \omega(m)$ , причем топологии  $\tau_\gamma$  возрастают. Пусть  $\tilde{\tau}_\varepsilon = \text{Sup}\{\tau_\gamma: \gamma < \varepsilon\}$  (т. е.  $\tilde{\tau}_\varepsilon$  — верхняя грань семейства топологий  $\{\tau_\gamma: \gamma < \varepsilon\}$ ). Пусть  $\tilde{\Sigma}_\varepsilon = \{(A, x): x \in X, A$  — базовая окрестность точки  $x$  в топологии  $\tilde{\tau}_\varepsilon\}$ . Очевидно, что  $\tilde{\tau}_\varepsilon$  —  $II$ -топология и можно считать,

\* Доказательством этого факта автор обязан А. Г. Елькину.

\*\*  $\omega(m)$  — начальный ординал мощности  $m$ .

что  $|\tilde{\Sigma}_\varepsilon|=m$  и, следовательно, элементы  $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$  можно заиндексировать парами  $(\varepsilon, \alpha)$ , где  $\alpha \in \{\beta: \beta < \omega(m)\}$ , а  $\varepsilon$  постоянно. Пусть  $\Sigma_\varepsilon = \cup \{\Sigma_\beta: \beta < \varepsilon\} \cup \Sigma_\varepsilon$ .

Во множестве пар  $\{(\alpha, \beta): \alpha \leq \varepsilon, \beta < \omega(m)\}$  выберем пару наименьшего номера. Пусть это  $(\alpha_0, \beta_0)$ . Рассмотрим пару  $(B, y) \in \Sigma_\varepsilon$ , заиндексированную именно индексом  $(\alpha_0, \beta_0)$ .

Пусть  $\Omega$  — произвольная  $\pi$ -система (см. п. 3) для топологии  $\tilde{\tau}_\varepsilon$  (например, база топологии). В силу леммы Куратовского (\*) существуют два дизъюнктивных множества  $B_1$  и  $B_2$  такие, что  $X = B_1 \cup B_2$ ,  $|B_i \cap G| = m$  для всякого  $G \in \Omega$  и  $i = 1, 2$ . Пусть, точка  $y$  оказалась во множестве  $B_1$ . Объявим  $A_1 = B_1 \cap B$  открыто-замкнутым множеством и образуем добавлением этого множества и его дополнения к топологии  $\tilde{\tau}_\varepsilon$  новую топологию  $\tau_\varepsilon$ .

Легко проверить, что  $\tau_\varepsilon$  —  $\mathcal{H}$ -топология и что окрестность  $B$  точки  $y$  содержится в себе замкнутой в  $\tau_\varepsilon$  окрестности  $A_1$ .

Пусть  $\tilde{\tau} = \text{Sup} \{\tau_\varepsilon: \varepsilon < \omega(m)\}$ . Тогда  $\tilde{\tau}$  —  $\mathcal{RH}$ -топология.

Справедливо, однако, более общее, чем предложение 2,

Предложение 3. Топология  $\tau$  на множестве  $X$  с  $\Delta\tau = |X|$  веса не более  $|X|^+$ , имеющая  $\pi$ -систему, усиливается до регулярной топологии  $\tilde{\tau}$  того же веса и дисперсионного характера.

Хотя предложение 3 не будет далее использовано (и потому приводится без доказательства), приведем из него

Следствие  $(m^+ = 2^m)$ . Всякая топология  $\tau$  на множестве  $X$  (мощности  $m$ ) с  $\Delta\tau = |X|$ , имеющая  $\pi$ -систему, усиливается до регулярной топологии того же веса и дисперсионного характера.

Теорема 2  $(m^+ = 2^m)$ . Всякая  $\mathcal{H}$ -топология  $\tau$  на множестве  $X$  (мощности  $m$ ) усиливается до регулярной максимальной топологии  $\tilde{\tau}$  дисперсионного характера  $m$ .

Доказательство. Пусть  $\mathcal{A} = \{A_\alpha: \alpha < \omega(m^+)\}$  и  $\mathcal{B} = \{B_\alpha: \alpha < \omega(m^+)\}$  — вполне упорядочения соответственно множества всех подмножеств из  $X$  мощности меньше  $m$  и мощности  $m$ . Опишем первый шаг трансфинитного процесса построения топологии  $\tilde{\tau}$ .

Выберем из  $\mathcal{B}$  элементы  $B$  с наименьшим номером, такой, что  $B \notin \tau$  и  $|B \cap G| = m$  для всякого  $G \in \tau$ . Объявляя открытым  $B$  и замкнутым  $A_B$ , получим новую топологию  $\tau'$ , большую  $\tau$ .  $\tau'$ , несомненно,  $\mathcal{H}$ -топология, и в силу предложения 3 ее можно усилить до  $\mathcal{RH}$ -топологии  $\tau_1$ . Снова выберем из  $\mathcal{B}$  элемент  $B$  и т. д.

Определим  $\tilde{\tau}$  как  $\text{Sup} \{\tau_\gamma: \gamma < \omega(m^+)\}$ . Так как  $\tilde{\tau}$  есть верхняя грань  $\mathcal{RH}$ -топологий, то  $\tilde{\tau}$  регулярна. Пусть  $K$  — плотное в себе подпространство  $(X, \tilde{\tau})$ . Тогда  $|K \cap G| = m$  для всякого  $G \in \tilde{\tau}$  и, значит,  $K$  на каком-то шаге было объявлено открытым. Следовательно,  $K \in \tilde{\tau}$ . Это влечет максимальность топологии  $\tilde{\tau}^*$ .

В счетном случае предложение 2 и теорема 2 допускают усиление.

Предложение 2.1. (AM). Топология счетного пространства Фреше — Урысона усиливается до регулярной топологии.

Теорема 2.1. (AM). Всякая топология на счетном множестве с базой мощности менее  $\aleph_0$  усиливается до регулярной максимальной топологии.

Здесь AM — аксиома Мартина (см., например, (10)). Сведения, необходимые для доказательства предложения 2.1 и теоремы 2.1, можно найти в (13, 10).

Все регулярные пространства этого параграфа могут считаться при желании  $T_1$ .

5. Материал, излагаемый здесь, стоит несколько в стороне от основной линии работы, но он необходим в п. 2 и 6.

Пусть  $R$  — максимальное хаусдорфово пространство. Тогда, как показано в (11), для всякой точки  $x$  система «выколотых» окрестностей этой точки

\* Легко видеть, что  $(X, \tilde{\tau})$  — максимальное пространство, если всякое плотное в себе подпространство открыто.

$\gamma(x) = \{Ox \setminus \{x\} : Ox - \text{окрестность точки } x\}$  является свободным ультрафильтром, который обозначим через  $\tilde{x}$ .

Назовем  $\tilde{R} = \{\tilde{x} : x \in R\}$  с топологией подпространства из  $\beta R_d$  пространством сопутствующих ультрафильтров.

1) Пусть  $f: R \rightarrow \tilde{R}$  — отображение, переводящее  $x$  в  $\tilde{x}$ . Тогда  $f$  — уплотнение, а  $f^{-1}$  — непрерывно.

2) Следствие. Если  $R$  — максимальное регулярное пространство, то  $R$  и  $\tilde{R}$  гомеоморфны и  $f$  — гомеоморфизм.

3) Некоторые характеристики пространства  $R$  переносятся на пространство  $\tilde{R}$ : так, пространство  $\tilde{R}$  плотно в себе, оно сепарабельно, если сепарабельно пространство  $R$  и т. д.

6. Пусть  $Z$  — группа целых чисел по сложению, а  $N \subset Z$  — множество натуральных чисел. N. Hindman доказал в предположении СН существование на множестве  $N$  ультрафильтра  $p$  со свойством  $(\alpha)$ : если  $A \in p$ , то  $\{x: A - x \in p\} \in p$ . Здесь  $A - x = \{a - x : a \in A, a > x\}$ . (Об ультрафильтре см. <sup>(14)</sup>, а также относящуюся сюда работу <sup>(15)</sup>.)

1. Пусть  $p(o) = p$ , а  $p(n)$  — фильтр  $p(o)$ , «перенесенный» из точки  $o$  в точку  $n$ , т. е.  $p(n) = \{n + b : b \in B\} : B \in p(o)$ . В силу свойства  $(\alpha)$  ультрафильтра  $p$  можно на множестве  $Z$  определить топологию  $\tau$ , в которой фильтр «выколотых» окрестностей каждой точки  $n \in Z$  представляет собой ультрафильтр  $p(n)$ . Следовательно,  $(Z, \tau)$  — однородное хаусдорфово плотное в себе максимальное пространство. К сожалению, не представляется возможным доказать его регулярность.

2. Пусть  $\tilde{Z} = \{\tilde{n} : n \in Z\}$  — пространство сопутствующих ультрафильтров, т. е. ультрафильтров  $p(n)$ . Ясно, что  $\tilde{Z}$  — плотное в себе подпространство  $\beta Z_d \setminus Z_d$ , состоящее из ультрафильтров одинакового типа. В силу теоремы Фролика из <sup>(15)</sup> всякое дискретное в себе подпространство из  $\tilde{Z}$  замкнуто.

Автор признателен А. Г. Елькину за постановку задач и обсуждение результатов, а также проф. N. Hindman за любезно сообщенную информацию, относящуюся к п. 6.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
22 II 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> M. Katětov, Cas. pro přest. mat. a fys., v. 75, № 2, 69 (1950). <sup>2</sup> А. Г. Елькин, ДАН, т. 195, № 2, 274 (1970). <sup>3</sup> M. Katětov, Математический сборник, т. 21 (63), 1, 3 (1947). <sup>4</sup> E. Hewitt, Duke Math. J., v. 10, № 1, 309 (1943). <sup>5</sup> В. И. Пономарев, УМН, т. 21, № 4, 101 (1966). <sup>6</sup> С. Сирота, ДАН, т. 183, № 6, 1265 (1968). <sup>7</sup> К. Куратовский, Топология, т. 1. М., 1966. <sup>8</sup> А. Г. Елькин, ДАН, т. 186, № 1, 9 (1969). <sup>9</sup> J. H. Silver, Ann. Math. Log., v. 3, № 1, 45 (1971). <sup>10</sup> В. И. Малыгин, Б. Э. Шапуровский, ДАН, т. 213, № 3, 532 (1973). <sup>11</sup> А. Г. Елькин, Вестн. Московск. унив., Матем. мех., № 5, 51 (1968). <sup>12</sup> А. Г. Елькин, III Тираспольск. симп. по общей топологии и ее приложениям. Кишинев, 1973. <sup>13</sup> R. Solovay, S. Tennenbaum, Ann. Math., v. 94, 201 (1971). <sup>14</sup> N. Hindman, Proc. Am. Math. Soc., v. 36, № 2, 341 (1972); J. Combinatorial Theory, Ser. A, in press. <sup>15</sup> General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra. Proc. of the Kanpur Topological Conference, 1968, Prague, 1971.