

УДК 519.3:62-50

МАТЕМАТИКА

А. В. МЕЗЕНЦЕВ

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УБЕГАНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИГР С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 3 IV 1974)

В данной заметке рассматривается линейная дифференциальная игра убегания. Первые, эффективно проверяемые, достаточные условия убегания получены в работах ^(1, 2). Результат, полученный в заметке, непосредственно примыкает к указанным работам.

Пусть в евклидовом пространстве R^n задано уравнение

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv, \quad (1)$$

где A — квадратная матрица размерности $n \times n$, B , C — прямоугольные матрицы размерностей $p \times n$, $q \times n$ соответственно, u , v — управляющие векторы, которые выбираются в классе измеримых вектор-функций, принадлежащих евклидовым пространствам U , V и удовлетворяющих ограничениям

$$\int_0^\infty (u(s), u(s)) ds \leq \rho^2, \quad (2)$$

$$\int_0^\infty (v(s), v(s)) ds \leq \sigma^2. \quad (3)$$

Управление $u(t)$, которое удовлетворяет ограничению (2), будем называть допустимым управлением преследователя, управление $v(t)$, которое удовлетворяет ограничению (3), — допустимым управлением убегающего. В пространстве R^n задано подпространство M , $\dim M \leq n-2$. Целью преследователя является приведение точки $z(t)$ за возможно короткое время на заданное подпространство M . Целью убегающего является по возможности дольше избегать приведения $z(t)$ на M .

Опишем, как изменяются ограничения на управления игроков в процессе игры. Пусть игра (1), (2), (3) начинается в момент $t=0$ из точки $z_0 \in M$ и на отрезке времени $[0, t]$, где $t > 0$, убегающий применяет допустимое управление $\tilde{v}(s)$, а преследователь применяет допустимое управление $\tilde{u}(s)$; тогда в момент t ограничения на управления имеют вид

$$\int_t^\infty (u(s), u(s)) ds \leq \rho^2 - \int_0^t (\tilde{u}(s), \tilde{u}(s)) ds \equiv \rho^2(t),$$

$$\int_t^\infty (v(s), v(s)) ds \leq \sigma^2 - \int_0^t (\tilde{v}(s), \tilde{v}(s)) ds \equiv \sigma^2(t).$$

Будем говорить, что из точки $z_0 \notin M$ возможно уклонение от встречи, если при любом выборе управления $u(t)$ убегающий может в каждый момент t так выбрать управление $v(t)$, что при любом значении $t \geq 0$ $z(t) \notin M$. При этом предполагается, что при формировании управления $v(t)$ убегающий в каждый момент t может использовать знание матриц A , B , C , подпространства M , векторов $z(s)$, $u(s)$ при $t - \theta \leq s \leq t$, где θ — положительное

число, которое зависит только от игры, а, кроме того, знание значений функций $\rho^2(t)$, $\sigma^2(t)$.

Пусть L есть ортогональное дополнение M до R^n , тогда каждой точке поставим в соответствие два числа: ξ — расстояние z до подпространства M , η — расстояние z до подпространства L , $z \rightarrow (\xi, \eta)$. Через W обозначим какое-либо двумерное векторное подпространство пространства L , а через π — оператор ортогонального проектирования из R^n на W . Очевидно, что $f_\tau = \pi e^{\tau A} B$, $g_\tau = \pi e^{\tau A} C$ суть линейные отображения пространств U , V на пространство W , аналитически зависящие от параметра τ .

Лемма 1. Пусть ранг отображения $\hat{g}_\tau$ при $\tau \neq 0$ равен s , тогда в пространстве W существует подпространство W_1 размерности s , а пространство V разбивается в прямую сумму своих подпространств V_1 и V_2 размерности s и $(q-s)$ соответственно. Далее, существуют отображения ψ_τ , g_τ^* , φ_τ . Отображение ψ_τ отображает W_1 в W , причем ψ_0 тождественно на W_1 , g_τ^* отображает V_1 в W_1 (а при $\tau \neq 0$ на W_1), φ_τ отображает V на V_1 , причем φ_τ тождественно на V_1 , а $\varphi_0 V_2 = 0$. Кроме того, $\hat{g}_\tau = \psi_\tau g_\tau^* \varphi_\tau$. Прямое слагаемое V_1 можно считать ортогональным дополнением V_2 .

Доказательство леммы содержится в работе (2).

Определение. Игру (1), (2), (3) будем называть факторизуемой, если существует такое линейное отображение h_τ пространства U в пространство V , аналитически зависящее от τ при всех достаточно малых $\tau \geq 0$, что $f_\tau = g_\tau h_\tau$, где g_τ есть отображение g_τ , рассматриваемое на V_1 .

Лемма 2. Для того чтобы игра (1), (2), (3) была факторизуема, необходимо и достаточно, чтобы существовали выпуклые множества $P \subset U$ и $Q \subset V$ максимальных размерностей, что при всех достаточно малых $\tau > 0$ имело место включение

$$f_\tau(P) \subset \hat{g}_\tau(Q). \quad (4)$$

Доказательство достаточности содержится в работе (2), необходимость легко доказать, используя лемму 1.

Отметим, что в силу неоднозначности факторизации оператор h_0 определяется неоднозначно. Через H_0 будем обозначать множество операторов h_0 .

Для формулировки теоремы введем функцию

$$\chi^2(t) = \inf_{h_0 \in H_0} \|h_0\| \rho^2(t).$$

Через χ обозначим арифметическое значение квадратного корня из $\chi(0)$.

Будем говорить, что выполнены условия убегания, если:

1) существует такое двумерное векторное подпространство W пространства L , что в W не содержится фиксированное одномерное векторное подпространство W_1 , для которого имеет место включение

$$\hat{g}_\tau(V_1) \subset W^1$$

при всех достаточно малых $\tau \geq 0$;

2) игра (1), (2), (3) факторизуема;

3) $\sigma > \chi$.

Теорема. Пусть выполнены условия убегания, тогда из любой точки фазового пространства $z_0 \notin M$ возможно уклонение от встречи, причем уклонение можно вести так, что имеет место следующее: существуют последовательности $\theta_k > 0$, $\varepsilon_k > 0$, $\theta_k \rightarrow 0$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$, положительная константа c и целое положительное число r , зависящие только от игры, существует также последовательность $T_k \rightarrow +\infty$, зависящая от процесса уклонения, что уклонение можно вести таким образом, что:

1) если $\xi_0 > \varepsilon_1$, то

$$\xi(t) \geq \varepsilon_1 \quad \text{при} \quad t \in [0, T_1],$$

$$\xi(t) > c\varepsilon_{k+1}/(1+\eta(t))^{2r} \quad \text{при} \quad t \in [T_k, T_{k+1}];$$

2) если $\xi_0 \leq \varepsilon_1$, то

$$\xi(t) > c\xi_0^{2r} / (1 + \eta(t))^{2r} \quad \text{при } t \in [0, T_1],$$

$$\xi(t) > c\varepsilon_{k+1} / (1 + \eta(t))^{2r} \quad \text{при } t \in [T_k, T_{k+1}].$$

Доказательство использует конструкцию уклонения, которая была описана в работе (2). При этом длины отрезков времени, в течение которых применяется специальное управление убегания, стремятся к нулю, а их сумма есть расходящийся ряд. Специальное управление убегания выбирается так, что на каждом отрезке времени $[T_k, T_{k+1}]$ величина $(\sigma - \chi)$, характеризующая преимущество убегającego по ресурсу управления, убывает не более чем на слагаемое числового ряда с положительными членами, который сходится к $(\sigma - \chi)$.

Пример.

$$x^{(p)} + a_1 x^{(p-1)} + \dots + a_p x = u,$$

$$y^{(q)} + b_1 y^{(q-1)} + \dots + b_q y = v,$$

$$\int_0^\infty (u(s), u(s)) ds \leq \rho^2, \quad \int_0^\infty (v(s), v(s)) ds \leq \sigma^2, \quad \sigma > 0,$$

где $x \in R^n$, $y \in R^n$, $n \geq 2$; $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ суть квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, размерности $n \times n$, x — преследующий вектор, y — убегающий вектор. Преследование считается законченным, когда впервые $x(t) = y(t)$. Оказывается, что, если выполнено хотя бы одно из двух условий:

1) $p > q$,

2) $p = q$, $\sigma > \rho$,

то из любого положения $y_0 \neq x_0$ возможно уклонение от встречи.

В заключение выражаю благодарность П. Б. Гусятникову за советы, которые способствовали улучшению результата.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко, ДАН, т. 189, № 4 (1969). ² Л. С. Понтрягин, Тр. Матем. инст. В. А. Стеклова АН СССР, т. 112, 30 (1971).