

М. А. ИОРДАНСКИЙ

МИНИМАЛЬНЫЕ НУМЕРАЦИИ ВЕРШИН ДЕРЕВЬЕВ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 6 III 1974)

1. Пусть $G(V, E)$ — произвольный граф, содержащий N вершин, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, $a_i < a_{i+1}$, $i=1, \dots, N-1$, — множество из N натуральных чисел. Всякое взаимно однозначное отображение $\varphi: V \rightarrow A$ будем называть нумерацией вершин графа G (нумерацией графа), а множество A — нумерующей последовательностью графа G . Нумерующая последовательность A называется слошной, если она состоит из последовательных чисел.

Рассмотрим функционал $\Delta^*G(V, E) = \sum_{(v_i, v_j) \in E} |\varphi(v_i) - \varphi(v_j)|$, где суммирование ведется по всем ребрам графа.

Определение. Минимальной нумерацией графа G будем называть любую нумерацию, на которой достигается $\min \Delta^*G = \Delta G$.

Построение минимальных нумераций графов оказывается необходимым в различных задачах, например:

1) В теории кодирования ⁽¹⁾, где особенно важен случай, когда граф G — n -мерный куб, параллелепипед, тор ⁽²⁻⁶⁾.

2) При размещении информации о графе в памяти ЭВМ для сокращения объема перебора при выделении его локальных подграфов ⁽⁸⁾. Наибольший интерес здесь представляют графы с малой насыщенностью ребрами: деревья и т. п.

Обозначим через T_N^p класс всех деревьев t , содержащих N вершин, степень каждой из которых не превосходит p , $T_N^{N-1} = T_N$, пусть $\max_{t \in T_N^p} \Delta t = \Delta T_N^p$.

Задача нахождения Δt в общем случае очень сложна, поэтому представляет значительный интерес изучение асимптотического поведения ΔT_N^p . Этой задачей занимался Шейдвассер ⁽⁷⁾ и получил следующие оценки *:

$$\frac{1}{4}(N^2-1) \leq \Delta T_N \leq \frac{1}{3}(N^2-1), \quad \text{для } p \geq 3 \quad \Delta T_N^p \leq \frac{p+7/3}{4} N \log N,$$

на подпоследовательности

$$N = \frac{(p-1)^{n+1}-1}{p-2}, \quad p \geq 3, \quad n=1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$\frac{p-2}{p \log(p-1)} N \log N \leq \Delta T_N^p < \frac{p+4/3}{4 \log(p-1)} N \log N.$$

В данной работе показано, что

$$\Delta T_N = \left[\frac{N^2}{4} \right], \quad \Delta T_N^p \asymp \frac{pN \log N}{\log p}$$

(равномерно по N и $p \geq 3$), а на подпоследовательности (1)

$$\Delta T_N^p \sim \frac{pN \log N}{4 \log p} \quad \text{при } p \rightarrow \infty.$$

* Здесь и в дальнейшем запись $\log$ обозначает логарифм по основанию 2.

Для произвольной нумерации $\varphi: V \rightarrow A$ всегда можно построить нумерацию $\varphi_0: V \rightarrow A_0 = \{1, 2, \dots, N\}$, у которой для $i=1, \dots, N$ вершины $\varphi^{-1}(i)$ и $\varphi^{-1}(a_i)$ совпадают. Легко проверяется

Л е м м а 1 (ср. (')). Для любой нумерации φ

$$\Delta^* G \geq \Delta^{\varphi_0} G.$$

Учитывая лемму 1, будем в дальнейшем рассматривать только случай $A = \{1, 2, \dots, N\}$.

2. Свойства минимальных нумераций деревьев. Пусть φ — произвольная нумерация дерева $t \in T_N$. Рассмотрим следующее представление дерева: выделим в t цепь $\sigma(V_0, E_0)$, соединяющую вершины $\varphi^{-1}(1)$ и $\varphi^{-1}(N)$; вершинам $v_i \in V_0$ сопоставим поддеревья $t_i^{\sigma}(V_i, E_i)$, $i=$

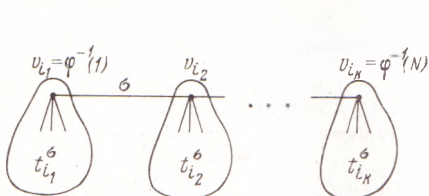


Рис. 1

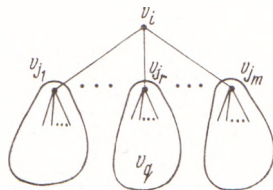


Рис. 2

$=1, \dots, k$, $k \leq N$. Множество V_i состоит из v_i и всех тех вершин, которые соединяются с v_i цепями, не содержащими ребер из E_0 ; множество E_i образовано ребрами этих цепей (см. рис. 1).

Л е м м а 2. Если φ — минимальная нумерация дерева t , то:

1) Нумерация цепи $\sigma(V_0, E_0)$ монотонна.

2) Нумерующие последовательности всех поддеревьев $t_i^{\sigma}(V_i, E_i)$, $i=1, \dots, k$, сплошные.

Л е м м а 3 ('). Если φ — минимальная нумерация дерева t , то вершины $\varphi^{-1}(1)$ и $\varphi^{-1}(N)$ висятые.

С л е д с т в и е 1. Минимальная нумерация дерева t является минимальной и на каждом его поддереве t_i^{σ} .

Применяя леммы 2 и 3 к t_i^{σ} , $i=1, \dots, k$, а затем к их поддеревьям и т. д., получаем

С л е д с т в и е 2. Любая минимальная нумерация производит разложение дерева на последовательность цепей σ_j , $j=1, \dots, l$ таких, что:

1) концевые вершины цепей являются висятыми в поддеревьях, в которых они выделяются;

2) нумерация каждой цепи монотонна, а нумерующие последовательности всех поддеревьев, образующихся в процессе разложения, сплошные.

Все нумерации, при которых в дереве можно выделить указанную выше последовательность цепей, будем относить к классу φ^* .

Л е м м а 4. Число минимальных нумераций дерева, содержащего $2n$ вершин нечетной степени, кратно 2^n .

Выделим в $t(V, E)$ произвольную вершину $v_i \in V$ степени m и все инцидентные ей ребра (v_i, v_r) , $r=1, \dots, m$. Любая вершина $v_q \in V$, $q \neq i$, связана с вершиной v_i единственной элементарной цепью.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что вершина v_q принадлежит ветке, выходящей из v_i по ребру (v_i, v_r) , если в v_q можно попасть из v_i по элементарной цепи, содержащей ребро (v_i, v_r) (см. рис. 2). Обозначим через T_v класс всех деревьев $t(V, E)$, в которых существует такая вершина $v_s \in V$, $p(v_s) \geq 2$, что все ветки, выходящие из нее, изоморфны между собой.

Л е м м а 5. Если φ — минимальная нумерация дерева $t \in T_v$, то цепь $\sigma(V_0, E_0)$ проходит через вершину v_s .

3. Оценки для ΔT_N . Пусть на произвольном дереве $t \in T_N$ задана некоторая нумерация $\varphi \in \varphi^*$.

Геометрическая интерпретация нумерации φ . Расположим вершины дерева $t(V, E)$ на числовой оси таким образом, чтобы любая вершина $v_i \in V$ находилась в точке с координатой $\varphi(v_i)$. Обозначим номера концевых вершин цепей σ_j , $j=1, \dots, l$, через a_{α}^j и a_{ω}^j и выделим на числовой оси отрезки $[a_{\alpha}^j, a_{\omega}^j]$, $j=1, \dots, l$. Нетрудно видеть, что отрезки, соответствующие произвольной паре цепей, либо не имеют общих точек, либо один из них является частью другого, причем концы отрезков не совпадают. Соединим дугой концы каждого отрезка $[a_{\alpha}^j, a_{\omega}^j]$. Учитывая предыдущее, эти дуги всегда можно провести так, чтобы они не пересекались (см. рис. 3).

Разобьем множество всех дуг на ярусы. К первому ярусу отнесем внешнюю дугу (она соединяет, очевидно, точки с координатами 1 и N).

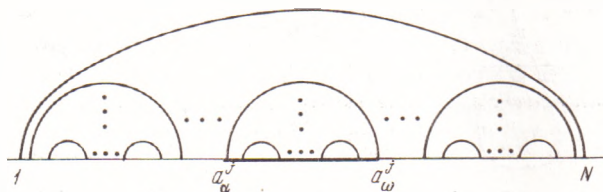


Рис. 3

К второму ярусу отнесем дуги, превращающиеся во внешние после удаления дуги первого яруса; к третьему ярусу отнесем дуги, превращающиеся во внешние после удаления дуг первого и второго ярусов и т. д. Обозначим через Q общее число ярусов, n_i — число дуг в i ярусе, σ_{ik} , $i=1, \dots, Q$, $k \in \{1, \dots, n_i\}$, — цепь, соответствующую k -й дуге i -го яруса.

Теорема 1. $\Delta T_N = \lfloor N^2/4 \rfloor$.

Доказательство. Оценка сверху. Для любых $\varphi \in \Phi^*$ и $t \in T_N$ имеем

$$\Delta^{\varphi} t = \sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^{n_i} \Delta^{\varphi} \sigma_{ik}. \quad (2)$$

Поскольку нумерация каждой цепи σ_{ik} монотонна, то $\Delta^{\varphi} \sigma_{ik}$ равна длине отрезка $[a_{\alpha}^{ik}, a_{\omega}^{ik}]$. Отрезки, соответствующие дугам одного яруса, очевидно, не имеют общих точек, тогда, учитывая способ разбиения дуг на ярусы, имеем

$$\sum_{k=1}^{n_i} \Delta^{\varphi} \sigma_{ik} \leq (N-1) - 2 \sum_{r=1}^{i-1} n_r - (n_i - 1). \quad (3)$$

Ясно, что $n_i \geq 1$, $i=1, \dots, Q$, а $Q \leq \lfloor N/2 \rfloor$, при этом из (2) и (3) получаем

$$\Delta^{\varphi} t \leq \sum_{i=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} (N-2i+1) = \left\lfloor \frac{N^2}{4} \right\rfloor.$$

Оценка снизу. Пусть t — звезда степени $N-1$. Используя следствие 2, легко показать, что при минимальной нумерации звезды номер ее центральной вершины равен $\lfloor N/2 \rfloor$ для N нечетного и $N/2$ или $N/2+1$ для N четного. В любом из этих случаев $\Delta t = \lfloor N^2/4 \rfloor$.

4. Оценки для ΔT_N^p .

Теорема 2. При любом $p \geq 3$

$$C_2 \frac{pN \log N}{\log p} < \Delta T_N^p < C_1 \frac{pN \log N}{\log p},$$

где $C_1 = 7/12 \log 3 \approx 0,9244$, а $C_2 = 1/72 (1 - 1/\log 10) \approx 0,0097$.

З а м е ч а н и я. 1) При $p \rightarrow \infty$ неравенства теоремы 2 можно заменить на асимптотические с $C_1=0,25$, $C_2=0,0625$. 2) На подпоследовательности (1)

$$\Delta T_{N^p} \sim \frac{pN \log N}{4 \log p} \text{ при } p \rightarrow \infty.$$

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
19 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ W. H. Kautz, Conv. Rec. IRE, Part 4, 47 (1954). ² L. H. Harper, J. Soc. Ind. and Appl. Math., v. 12, № 1, 131 (1964). ³ J. H. Lindsey, Am. Math. Monthly, v. 71, 508 (1964). ⁴ K. Steiglitz, A. J. Bernstein, J. Soc. Ind. and Appl. Math., v. 13, № 2, 441 (1965). ⁵ L. H. Harper, J. Comb. Theory, v. 1, 385 (1966). ⁶ L. H. Harper, J. Appl. Prob., v. 4, № 2, 397 (1967). ⁷ М. А. Шейдвассер, Сб. Дискретный анализ, в. 17, 56 (1970). ⁸ Ю. А. Виноградов, М. А. Иорданский, Сборн. Проблемы кибернетики, в. 24, 147 (1971).