Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 5

УДК 519.52:517.51 *МАТЕМАТИКА*

Г. В. ЧУДНОВСКИЙ, Д. В. ЧУДНОВСКИЙ

УБЫВАЮЩЕ НЕПОЛНЫЕ УЛЬТРАФИЛЬТРЫ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 18 III 1974)

Здесь продолжаются исследования, начатые в работах авторов [1], К. Кунена и К. Прикрого [2, 7] и [3, 5]. Основное внимание будет уделено свойствам ультрафильтров в конструктивном универсууме L. Это объясняется тем, что комбинаторные свойства L относительно хорошо изучены (см. [4, 7]).

1. Воспользуемся общепринятыми понятиями и обозначениями из [1, 5]. Напомним лишь, что ультрафильтр D называется λ-убывающе неполным, $\lambda\in[D]$, если существует убывающая последовательность, состоящая из λ элементов D с пустым пересечением. Обобщая это определение, назовем, следуя [3], ультрафильтр D λ-разложимым, если существует такое семейство X_ξ, $\xi<\lambda$, непересекающихся множеств, что $\bigcup\limits_{\xi<\lambda} X_\xi\in D$, хотя $\bigcup\limits_{\xi\in S} X_\xi\notin D$ для любого $S\subseteq\lambda$, $|S|<\lambda$.

Лемма 1. 1) *Для регулярного λ λ-разложимость и λ-убывающая неполнота эквивалентны.*

2) *Для сингулярных λ λ-разложимость влечет $\mathrm{cf}\,\lambda$- или, что то же, λ-убывающую неполноту.*

При ССН для предельного λ из μ-разложимости ультрафильтра при достаточно больших $\mu<\lambda$ (и $\mathrm{cf}\,\lambda$-разложимости для сингулярного λ) следует λ-разложимость D. Это доказано в [illegible].

Строение ультрафильтров в терминах убывающей неполноты, по-видимому, должно описывать следующее

Предположение. *Если существует однородный ультрафильтр над k, являющийся λ-убывающе полным (или же λ-неразложимым) для некоторого $\lambda<k$, то существует внутренняя подмодель с измеримым в ней кардиналом или же, по крайней мере, существует $O^\#$* [8].

Это предположение, по-видимому, единственно разумный вариант гипотезы Кейслера [9] в свете современных теоретико-множественных представлений. Случай $\lambda=\omega_0$ тривиален. Наверно, для k-наследника, удовлетворяющего условию предположения, существуют внутренние подмодели с любым числом измеримых кардиналов. Слабый вариант этого предположения для полностью неразложимых ультрафильтров над строго недостижимыми кардиналами был получен Дж. Сильвером [3].

Основным случаем предположения назовем случай регулярного k и ССН. Изучением этого случая при $V=L$ займемся ниже.

2. Для исследования убывающе неполных ультрафильтров полезным является

Предположение 1 ([3], ССН). *Если существует однородный над k-ультрафильтр, являющийся λ-убывающе полным при $\mathrm{cf}\,k>\lambda$, то над k существует λ-убывающе полный слабо нормальный ультрафильтр.* **Ультрафильтр** *U над k называется слабо нормальным, если он однороден и для любой регрессивной функции f: $k\to k\,(f(\xi)<\xi)$ существует такое $\xi_0<k$, что множество $\{\xi: f(\xi)\leqslant\xi_0\}\in U$.*

Итак, λ-убывающе полные ультрафильтры над регулярными кардиналами всегда можно считать слабо нормальными. Рассмотрим такие ультрафильтры при $V=L$. Основным результатом работы ([3]) является

Теорема (Иенсен, Сильвер, Прикрый). *При $V=L$ над некомпактным регулярным кардиналом k не существует слабо нормальных λ-убывающе полных ультрафильтров при $\lambda\leqslant k$. В частности, над k все ультрафильтры убывающе λ-неполны при $\omega_0\leqslant\lambda\leqslant k$.*

Оказывается, что имеет место значительно более общая

Теорема 1 ($V=L$). *На некомпактных регулярных кардиналах не существует слабо нормальных ультрафильтров.*

Для доказательства воспользуемся следующим комбинаторным принципом в L, установленным Р. Иенсеном ([5]).

$P_2(k, k)$. Существует семейство $\mathscr{F}$ функций из $k\to k$ такое, что для любого бесконечного $X\subset k$, $|X|<k$ и $\mathscr{F}\upharpoonright X=\{f\cap X\times X\colon f\in\mathscr{F}\}$, $|\mathscr{F}\upharpoonright X|\leqslant|X|$ и любой функции $g\colon k\to k$ существует $f\in\mathscr{F}$ с $f(\xi)>g(\xi)$ для всех $\xi<k$.

Как известно, этот комбинаторный принцип Прикрого имеет место для всех некомпактных кардиналов (более слабое утверждение доказано в ([7])).

Пусть k — некомпактный регулярный кардинал, а D — слабо нормальный однородный ультрафильтр на нем. Назовем параметризацией D отображение $\Pi\colon \xi\to\bar{\xi}$ множества ординалов k в $S(k)$ со следующими свойствами:

1) $|\bigcup \operatorname{Rang}\Pi|=k$;

2) $\bar{\xi}\subseteq\xi$ для любого $\xi<k$;

3) для любого $\zeta\in\bigcup\operatorname{Rang}\Pi$, $\{\xi\colon \zeta\in\bar{\xi}\}\in D$.

Рассмотрим параметризацию Π_1 такую, что $\bar{\xi}^1$ — конфинальное подмножество ξ порядкового типа $\operatorname{cf}(\xi)$. Существование такой параметризации вытекает из ([3]), леммы 8—10. Воспользуемся, как и в ([5]), принципом $P_2(k, k)$. Построим матрицу $A_{\xi,\zeta}$ $\xi<k$, $\zeta<k$, подмножеств k так. Пусть $\mathscr{F}$ — семейство функций, существование которого обеспечивается $P_2(k, k)$ (ввиду $V=L$); $\mathscr{F}_\xi=\{f\upharpoonright\bar{\xi}\times\bar{\xi}\colon f\in\mathscr{F}\}$. Тогда $|\mathscr{F}_\xi|\leqslant|\bar{\xi}|$ $(\leqslant\operatorname{cf}(\xi))$ и $\mathscr{F}_\xi=\{h_\rho^\xi\colon \rho<|\bar{\xi}|\}$. Положим $\bar{\xi}=\{\xi_\rho\colon \rho<|\bar{\xi}|\}$ и определим $A_{\zeta,\mu}$ для ζ, $\mu\leqslant k$:

$\xi\in A_{\zeta,\mu}$ тогда, когда либо $\zeta\notin\bar{\xi}$, либо $\mu\notin\bar{\xi}$, или же ζ, $\mu\in\bar{\xi}$ и для ординалов ρ, $\tau<|\bar{\xi}|$ имеем $\zeta=\xi_\tau$ и $\mu=h_\rho^\xi(\zeta)$ при $\rho\leqslant\tau$.

Ясно, что для фиксированного $\zeta<k$ и $S\subset k$,

$$\bigcap_{\mu\in S}A_{\zeta,\mu}\subseteq\{\xi<k\colon \zeta\notin\bar{\xi}\quad\text{или}\quad|\bar{\xi}\cap S|<|\bar{\xi}|\}. \tag{1}$$

Кроме того, для любой функции $f\colon k\to k$, $f\in\mathscr{F}$ и для любого $S\subset k$ имеем

$$\xi\in\bigcup_{\zeta\in S}A_{\zeta,f(\zeta)}\quad\text{при}\quad|S|\geqslant|\bar{\xi}|. \tag{2}$$

В самом деле, пусть $\xi<k$. Понятно, что при $S\setminus\bar{\xi}\neq\phi$ или $f(S)\setminus\bar{\xi}\neq\phi$, $\xi\in\bigcup\limits_{\zeta\in S}A_{\zeta,f(\zeta)}$. Если же $S\cup f(S)\subset\bar{\xi}$, то по определению $\mathscr{F}_\xi$ имеем $f\cap(S\times S)\subset\subset h_\rho^\xi$ для некоторого $\rho<|\bar{\xi}|$. Поскольку $|S|\geqslant|\bar{\xi}|$, то существует $\zeta\in S$, $\tau>\rho$ с $\zeta=\xi_\tau$. Тогда $h_\rho^\xi(\zeta)=f(\zeta)$ и $\xi\in A_{\zeta,f(\zeta)}$.

Итак, (2) доказана.

Из (1) и (2) следует

Лемма 2. *Существует такая параметризация* $\Pi_2\colon \xi\to\bar{\xi}^2$, *что* $|\bar{\xi}^2|<<|\bar{\xi}^1|+\omega_0$.

В самом деле, предположим, что для некоторого $\zeta<k$ и $T\subseteq k$, $|T|=k$, $A_{\zeta,\mu}\in D$ для всех $\mu\in T$. Положим для краткости при $\zeta\in\bigcup\operatorname{Rang}\Pi_1$, $e_\zeta==\{\xi<k\colon \zeta\in\bar{\xi}^1\}\in D$. Имеем $A_{\zeta,\mu}\cap e_\zeta\cap e_\mu\in D$ для $\mu\in T$. Положим $\bar{\xi}^2=\{\mu\in T,\ \mu<<\xi,\ \xi\in A_{\zeta,\mu}\cap e_\zeta\cap e_\mu\}$. Теперь $\bar{\xi}^2\subseteq\xi$ и, согласно (1) $|\bar{\xi}^2|<|\bar{\xi}^1|$. Таким образом, построенная параметризация Π_2 удовлетворяет всем требуемым условиям.

Необходимо еще рассмотреть случай, когда для любого $\zeta<k$ совокупность тех $\mu<k$, для которых $A_{\zeta,\mu}\in D$, имеет мощность $<k$. По определению $\mathscr{F}$ отсюда следует существование такой функции $f: k\to k$, что $A_{\zeta,f(\zeta)}\notin D$ для любого $\zeta<k$. Введем теперь новую параметризацию Π_3 так: $\xi^3=\{\zeta\in\bigcup \operatorname{Rang}\Pi_1,\ \zeta<\xi:\ \xi\notin A_{\zeta,f(\zeta)}\}$. Согласно (2), $|\xi^3|<|\xi^1|+\omega_0$. Таким образом, Π_3 — искомая параметризация и лемма 2 доказана.

Нетрудно заметить, что существование параметризации Π_2 (лемма 2) противоречит слабой нормальности ультрафильтра D. Действительно, $|\xi^2|<|\xi^1|+\omega_0\leqslant\operatorname{cf}(\xi)$. Следовательно, $\sup\xi^2<\xi$ и для некоторого $\xi_0<k$, ввиду слабой нормальности D, $\xi^2\subseteq\xi_0$ почти всюду $(\operatorname{mod} D)$. Это противоречит определению параметризации (п.п. 1) и 3)). Этим завершается доказательство теоремы 1.

Интересно рассмотреть компактные кардиналы. Матрицы типа Уламовской в этом случае бесполезны и необходимо изучать ультрафильтры, связанные со всей алгеброй множеств $S(k)$. В настоящее время неясно, справедливо ли свойство $P_2(k, k)$ вообще для всех регулярных k. Если это так, то из доказательства теоремы 1 следует положительный ответ на основной случай нашего предположения. Тем не менее для небольших компактных кардиналов желаемый ответ может быть получен.

Теорема 2 $(V=L)$. *Пусть C_0 — класс несчетных некомпактных кардиналов, $M_{\omega_0}(C_0)\setminus C_0$—$\omega_0$-итерация операции Мало* ([10]) *относительно C_0. Если $\alpha\in M_{\omega_0}(C_0)\setminus C_0$, то над α все однородные ультрафильтры λ-убывающе неполны при всех $\omega_0\leqslant\lambda\leqslant\alpha$.*

Приведем набросок доказательства. Пусть над компактным α есть слабо нормальный λ-убывающе полный ультрафильтр D для некоторого $\lambda<\alpha$. По теореме 4 Сильвера и Прикрого ([3]) достаточно показать, что $Y=\{\xi<\alpha:\ |\xi|$ компактно$\}\in D$. Предположим, что $Z=\alpha\setminus Y\in D$. Воспользуемся свойством Курепы в следующей формулировке:

$K(\varkappa)$. Существуют множества A, K, $|A|=|K|=\varkappa$, $K\subseteq\varkappa$ и семейство $\mathscr{F}$ подмножеств A, $|\mathscr{F}|\geqslant\varkappa^+$ такое, что $\bigcup\limits_{\xi\in K}A_\xi=A$, $|A_\xi|\leqslant|\xi|$, $\{A_\xi\}_{\xi\in k,\,\xi<\alpha}$ — возрастающая последовательность и $\mathscr{F}\restriction A_\xi=\{F\cap A_\xi:\ F\in\mathscr{F}\}$ имеет мощность $\leqslant|\zeta|$.

Лемма 3 (([5]), $(V=L)$). *Для всех некомпактных $\varkappa>\omega_0$ $K(\varkappa)$ имеет место.*

Лемма 4. *Для слабо нормального ультрафильтра E над регулярным β из $SN\cap\beta\in E$ следует (k, β)-регулярность E при некотором $k<\beta$.*

Поскольку D — однородный ультрафильтр, то Z неограничено в D. Следовательно, по теореме 1 и лемме 4 $\{\xi<\alpha:\ D\ \ |\xi|$-убывающе неполон и $|\xi|$-регулярен$\}\in D$.

Согласно лемме 3, отсюда получаем, что $X=\{\varkappa<\alpha:\ \varkappa\in C_0\cap\operatorname{Reg},\ K(\varkappa)$ и $D\ \ \varkappa$-убывающе полон$\}\in D$.

Лемма 5 (см. предложение 4 из ([3])). *При $\varkappa\in X$ $|\prod\varkappa/D|=|\varkappa^\alpha/D|=$ $=\varkappa$.*

Пусть $\mathscr{F}_\varkappa$ — семейство подмножеств $\varkappa$, удовлетворяющее $K(\varkappa)$ для $\varkappa\in$ $\in X$. Покажем, что выполнено $K(\alpha)$. Положим $A\neq\prod\limits_{\varkappa<\alpha}\varkappa/D$, тогда, по слабой нормальности D, A имеет мощность α и $A=\bigcup\limits_{\varkappa\in X}A_\varkappa$, где $A_\varkappa=\varkappa^\alpha/D$ имеет мощность $\varkappa$ при $\varkappa\in X$. Далее определяем семейство подмножества $\mathscr{F}$ так: $\mathscr{F}=$ $=\prod\limits_{\varkappa\in X}\mathscr{F}_\varkappa/D$. Так как ультрафильтр D над α однородный, то $\prod\limits_{\varkappa\in X}\varkappa^+/D\geqslant\alpha^+$ согласно ([9]). Отсюда следует, что $|\mathscr{F}|\geqslant\alpha^+$ и $|\mathscr{F}\restriction A_\varkappa|=|\{\prod\limits_{\chi\in X}F_\chi/D\cap\varkappa^\alpha/D:$ $F_\chi\in\mathscr{F}_\chi\}|=|\{\prod\limits_{\chi}F_\chi\cap\varkappa/D:\ F_\chi\in\mathscr{F}_\chi\}|=\varkappa^\alpha/D\leqslant\varkappa$ при $\varkappa=X$. Итак, свойство Курепы выполнено для кардинала α.

С другой стороны, свойство $K(\alpha)$ не выполняется. Действительно, сохраняя предыдущие обозначения, получим, что $\prod_{\varkappa<\alpha} |\mathcal{F} \upharpoonright A_\varkappa|/D| \geqslant \alpha^+$, поскольку $|\mathcal{F}| \geqslant \alpha^+$. Однако кардинал в левой части неравенства $\leqslant \prod_{\varkappa<\alpha} \varkappa/D$. Ультрафильтр D слабо нормален. Поэтому $\prod_{\varkappa<\alpha} \varkappa/D = \bigcup_{\chi<\alpha} \chi^\alpha/D$, а для $\chi \in X$ по лемме 8 $\chi^\alpha/D \leqslant \chi$. Таким образом, получаем неравенство $\alpha \geqslant \alpha^+$. Поэтому не существует кардинала α, который удовлетворяет приведенным предположениям, и теорема 2 доказана.

Из доказательства теоремы 2 вытекает, что при $V=L$ из существования над α однородного λ-убывающе полного для некоторого $\lambda<\alpha$ ультрафильтра D получаем $\{\varkappa<\alpha: \varkappa \text{ компактен}\} \in D$.

В заключение отметим, что все доказанные результаты справедливы не только при $V=L$, но и при $V=L(A)$ для подходящих $A \subset On$. В частности, используя результаты Иенсена ([4]), можно показать, что из существования над регулярным α однородного λ-убывающе полного при $\lambda \leqslant \alpha$ ультрафильтра следует существование в L ω_0-Мало строго недостижимого кардинала.

Результаты, изложенные в работе, были получены в 1971—1972 гг., а их продолжение будет приведено в другом месте.

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Поступило 18 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. В. Чудновский, Д. В. Чудновский*, ДАН, т. 198, № 4, 779 (1971). [2] *K. Kunen, K. Prikry*, J. Symb. Logic, v. 36, № 4, 650 (1971). [3] *K. Prikry*, Lecture Notes in Math., Berlin, v. 337, 1973, p. 459. [4] *R. B. Jensen*, Ann. Math. Logic, v. 4, № 3, 229 (1972). [5] *C. C. Chang*, Theory of Sets and Topology, Berlin, 1972, p. 49. [6] *A. Adler, M. Jorgensen*, Canad. J. Math., v. 24, № 5, 830 (1972). [7] *K. Prikry*, Ann. Math. Logic, v. 1, № 2 (1971). [8] *R. Solovay*, Trans. Am. Math. Soc., v. 127, 50 (1967). [9] *H. J. Keisler*, Bull. Am. Math. Soc., v. 70, 644 (1964). [10] *H. J. Keisler, A. Tarski*, Fund. Math., v. 53, 225 (1964).