Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. С. КОЛОКОЛЬНИКОВ

О РОСТЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАСС

(Представлено академиком В. С. Владимировым 26 II 1974)

В работе А. А. Гольдберга ([1]) было доказано, что если аргументы нулей и полюсов мероморфной функции удовлетворяют некоторым специальным ограничениям, то эта функция обладает известной регулярностью роста. Оказывается, что аналогичное явление имеет место для функций, представимых в виде разности субгармонических в R^m, $m\geqslant 2$. Установление этого и является целью настоящей работы. Попутно мы получаем многомерный аналог одной известной формулы Р. Неванлинны, часто используемой в теории целых и мероморфных функций.

Пусть $u(x)$ — функция, представимая в виде

$$u(x)=u_1(x)-u_2(x), \tag{1}$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — субгармонические во всем пространстве R^m, $m\geqslant 2$, функции, гармонические в некоторой окрестности начала координат. Обозначим через μ_1 и μ_2 меры, ассоциированные по Риссу функциям u_1 и u_2 соответственно. Будем предполагать, что μ_1 и μ_2 сосредоточены на непересекающихся множествах.

Будем обозначать через $x^0=x/|x|$ единичный орт в направлении точки x.

Пусть $Y(x^0)$ — сферическая функция степени p, являющаяся решением уравнения $LY+p(p+m-2)Y=0$, где L — сферическая часть оператора Лапласа, p — натуральное число. В частности, при $m=2$ функция Y имеет вид $Y(x^0)=a\cos p\varphi+b\sin p\varphi$, $x^0=e^{i\varphi}$, и является решением уравнения $Y''+p^2Y=0$.

Рассмотрим множества B_1^p, B_2^p на единичной сфере $\{x\colon |x|=1\}$, определенные равенствами $B_1^p=\{x^0\colon Y(x^0)>0\}$, $B_2^p=\{x^0\colon Y(x^0)<0\}$, и некоторые множества $A_j^p\Subset B_j^p$, $j=1, 2$. Пусть $D_j^p=\{x\colon x_0\in A_j^p\}$ — конусы, соответствующие областям A_j^p, $j=1, 2$.

Определение. Если существуют Y и A_1^p, A_2^p такие, что

$$\int\limits_{R^m\setminus D_1^p}\frac{d\mu_1}{|x|^{p+m-2}}+\int\limits_{R^m\setminus D_2^p}\frac{d\mu_2}{|x|^{p+m-2}}<\infty, \tag{2}$$

то будем говорить, что у функции $u(x)$ массы p разделены.

В частности, у функции $u(x)$ массы p разделены, если распределение масс μ_1 функции u_1 сосредоточено в D_1^p, а распределение масс μ_2 функции u_2 — в D_2^p.

Чтобы сформулировать полученные результаты, нам понадобятся некоторые величины, характеризующие рост и распределение масс функций, представимых в виде разности двух субгармонических.

Пусть $u(x)$ — функция, представимая в виде (1). Обозначим

$$\sigma_m=\frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)},\quad \sigma=\sigma_m r^{m-1},$$

и положим ([4])

$$m(r,u)=\sigma^{-1}\int\limits_{S_r(0)} u^+(y)\,dy,\quad u^+(y)=\max\{0,u(y)\}$$

(интегрирование проводим по поверхности сферы $S_r(0)=\{x\colon\ |x|=r\}$).

Пусть $E_t(0)=\{x\colon\ |x|<t\}$ — шар радиуса t с центром в начале координат и $\mu(t)=\mu(\bar{E}_t(0))$. Положим

$$N(r,u)=(m-2)\int\limits_0^r\frac{\mu_2(t)\,dt}{t^{m-1}}\quad\text{при}\quad m>2,$$

$$N(r,u)=\int\limits_0^r\frac{\mu_2(t)\,dt}{t}\quad\text{при}\quad m=2,$$

$$T(r,\ u)=m(r,\ u)+N(r,\ u). \tag{3}$$

Функция $T(r,\ u)$ называется характеристикой функции $u(x)$.

Теорема 1. *Если у функции $u(x)$ массы p разделены, то существует предел $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-p}T(r,\ u)$, конечный или бесконечный.*

Порядок и нижний порядок функции $u(x)$, представимой в виде разности двух субгармонических, определяются соответственно равенствами

$$\rho(u)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\{\ln r\}^{-1}\ln T(r,\ u),\qquad \lambda(u)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\,\{\ln r\}^{-1}\ln T(r,\ u). \tag{4}$$

Заметим, что если функция $u(x)$ является субгармонической, то в соотношениях (4) можно заменить $T(r,u)$ на $M(r,u)=\sup\limits_{x\in E_r(0)} u^+(x)$.

Теорема 1 показывает, что рост функции $u(x)$ не может быть сколь угодно нерегулярным. В частности, из нее непосредственно вытекает, что если $\lambda(u)<p$, то $\rho(u)\leqslant p$.

Эта теорема является обобщением теоремы А. А. Гольдберга ([1], [2]) (см. также ([3]), стр. 338). В самом деле, если $f(z)$ — мероморфная функция, то функция $u(z)=\ln|f(z)|$ является разностью двух субгармонических функций $u_1(z)=\ln|f_1(z)|$ и $u_2(z)=\ln|f_2(z)|$, где $f_1(z)$, $f_2(z)$ — целые функции без общих корней такие, что

$$f(z)=f_1(z)/f_2(z). \tag{5}$$

Мера $\mu_1=\mu_1(E)$ равна числу корней функции $f(z)$ на множестве E, а $\mu_2=\mu_2(E)$ — числу полюсов функции $f(z)$ на множестве E. Для такой функции $u(z)$ характеристика $T(r,\ u)$ в смысле определения (3) совпадает с неванлинновской характеристикой $T(r,\ f)$ для функции $f(z)$, определенной равенством (5).

Если нули и полюсы разделены по определению А. А. Гольдберга (([3]), стр. 338), то это означает, что массы функции $u(z)$ p-разделены в смысле нашего определения при выборе $Y=\cos p\varphi$ и

$$A_1{}^p=\bigcup_{j=0}^{p-1}\left\{e^{i\varphi}\colon\ \left|\,\varphi-\pi\frac{2j}{p}\right|\leqslant\eta\right\},\quad A_2{}^p=\bigcup_{j=0}^{p-1}\left\{e^{i\varphi}\colon\ \left|\,\varphi-\pi\frac{2j+1}{p}\right|\leqslant\eta\right\},$$

где η — число, удовлетворяющее условию $0\leqslant\eta<\pi/(2p)$. Отсюда следует, что при $m=2$ теорема 1 содержит теорему А. А. Гольдберга.

В вопросах теории целых и мероморфных функций находит применение следующая формула Р. Неванлинны ([5], стр. 37):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\varphi})|\cos p\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2p}\sum_{|a_m|<r}\left(\frac{r^p}{|a_m|^p}-\frac{|a_m|^p}{r^p}\right)\cos p\alpha_m-$$
$$-\frac{1}{2p}\sum_{|b_n|<r}\left(\frac{r^p}{|b_n|^p}-\frac{|b_n|^p}{r^p}\right)\cos p\beta_n+r^p\operatorname{Re}\frac{d^p}{dz^p}\ln f(z)\,|_{z=0},\tag{6}$$

где $\alpha_m=\arg a_m$, $\beta_n=\arg b_n$. Для доказательства теоремы 1 понадобилось обобщение формулы (6) для функций вида (1), представимых в виде разности двух субгармонических. Пусть $A=1+2p/(m-2)$ при $m>2$ и $1/(2p)$ при $m=2$, а $B=A$ при $m>2$ и $^1/_2$ при $m=2$. Пусть $K^2=\int\limits_{S_1(0)}Y^2(x^0)\,dx^0$, а $w_1(t,p)=t^p-t^{-p}$.

Теорема 2. *Пусть функция $u(x)$ представима в виде* (1). *Справедливо соотношение*

$$\sigma^{-1}\int\limits_{S_R(0)}u(y)Y(y^0)\,dy=AR^{(2-m)/2}\int\limits_{E_R(0)}y^{(2-m)/2}w_1\left(\frac{R}{|y|},\,p+\frac{m-2}{2}\right)\times$$
$$\times Y(y^0)\,d\nu+\frac{BR^p}{K^2|x|^p}\int\limits_{S_1(0)}u(x)Y(x^0)\,dx^0,$$

где $\nu=\mu_1-\mu_2$, x — точка, принадлежащая окрестности начала координат, в которой $u_1(x)$ и $u_2(x)$ в представлении (1) *гармонические.*

А. А. Гольдберг ([3], стр. 344) показал, что у мероморфной функции $f(z)$ достаточно большого роста с разделенными нулями и полюсами «мало» нулей и полюсов в том смысле, что величина $\varkappa(f)=\varliminf\limits_{r\to\infty}(N(r,0)+$ $+N(r,\infty))/T(r,f)$ строго меньше 2.

Аналогичный результат верен для функций, представимых в виде (1), с разделенными массами. Обозначим $\varkappa(u)=\varliminf\limits_{r\to\infty}(N(r,-u)+N(r,u))/T(r,u)$.

Теорема 3. *Пусть у функции $u(x)$, представимой в виде* (1), *массы p разделены.*

а) *Если* $0<\varlimsup\limits_{r\to\infty}r^{-p}T(r,u)<\infty$, *то* $\varkappa(u)=0$.

б) *Если* $\varlimsup\limits_{r\to\infty}r^{-p}T(r,u)=\infty$, *то* $\varkappa(u)\leqslant2/(1+K_1)$, *где постоянная* $K_1=$ $=K_1(Y,A_1{}^p,A_2{}^p,m)>0$.

Автор признателен В. С. Азарину и И. В. Островскому за постановку задачи и внимание к работе.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
21 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Гольдберг*, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 4, 67 (1960). [2] *А. А. Гольдберг*, ДАН, т. 137, № 5, 1030 (1961). [3] *А. А. Гольдберг, И. В. Островский*, Распределение значений мероморфных функций, «Наука», 1970. [4] *И. И. Привалов*, Субгармонические функции, М.—Л., 1937. [5] *R. Nevanlinna*, Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929.