

УДК 517.947.5.37

МАТЕМАТИКА

В. А. МИХАЙЛЕЦ

О РАЗРЕШИМОСТИ И ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено академиком И. П. Векуа 1 III 1974)

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, а $\mathfrak{H} = L_2(H, [0, b])$, $b < \infty$, — гильбертово пространство всех измеримых вектор-функций $y(t)$, $t \in [0, b]$, со значениями в H , для которых $\int_0^b (y(t), y(t)) dt < \infty$.

Рассмотрим в $\mathfrak{H}$ дифференциальное выражение

$$l[y] = -y'' + Ay + q(t)y, \quad (1)$$

где A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в H ; можно сразу считать, что $A > E$ (E — тождественный оператор), а $q(t)$ — слабо измеримая операторная функция, значениями которой являются ограниченные самосопряженные операторы в H , причем норма $\|q(t)\|$, как функция от t , ограничена на $[0, b]$.

На множестве $\mathcal{D}_0'$ элементов вида $y(t) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) f_k$, где f_k принадлежат области определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A , а $\varphi_k(t)$ из соболевского пространства $W_2^2(0, b)$, определим оператор $L_0' : L_0' y = l[y]$, $y \in \mathcal{D}_0'$. Он симметричен и полуограничен снизу в $\mathfrak{H}$. Будем предполагать далее, что оператор L_0' положительно определен. Его замыкание в $\mathfrak{H}$ обозначим через L_0 , сопряженный к нему оператор — через L_0^* .

Построим по оператору A шкалу гильбертовых пространств H_τ , $-1 \leq \tau \leq 1$ (см. (5)). Оператор A изометрически действует из H_1 в H . Тогда сопряженный к нему оператор $\tilde{A}$, действующий из H в H_{-1} , является расширением оператора A . Положим $\tilde{l}[y] = -y'' + \tilde{A}y + q(t)y$. Тогда на $\mathcal{D}(L_0^*)$ оператор L_0^* действует как $L_0^* y = \tilde{l}[y]$. Полное описание областей определения операторов L_0^* и L_0 получено М. Л. Горбачуком (см. (3)).

Назовем расширение $\tilde{L}$ оператора L_0 собственным, если оно является частью оператора L_0^* , и разрешимым (вполне разрешимым), если существует обратный к $\tilde{L}$ оператор $\tilde{L}^{-1}$, определенный на всем $\mathfrak{H}$, и он непрерывен (вполне непрерывен).

В настоящей работе в терминах граничных условий описываются все разрешимые (вполне разрешимые) собственные расширения оператора L_0 и выделяются некоторые классы расширений с полной в $\mathfrak{H}$ системой собственных и присоединенных вектор-функций (сокращенно с.п.ф.). Полученные теоремы можно применить в исследовании некоторых несамосопряженных граничных задач для дифференциального уравнения в частных производных вида $-\partial^2 u / \partial t^2 + \mathcal{L}u$ в цилиндрической области $(0, b) \times G$, где $\mathcal{L}$ — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в пространстве $L_2(G)$, порожденный эллиптическим дифференциальным выражением и некоторым граничным условием.

Отметим, что для случая абстрактного симметрического (а также более общего) оператора в гильбертовом пространстве описание всех его собственных разрешимых и вполне разрешимых расширений получено М. И. Вишиком (см. (1)).

2. Граничное условие Дирихле $y(0)=y(b)=0$ порождает вместе с выражением $\mathcal{I}[y]$ самосопряженное расширение L_D оператора L_0 . Причем, как нетрудно убедиться, оно является «жестким» в смысле М. Г. Крейна.

Л е м м а (см. (2)). *Справедливо разложение*

$$\mathcal{D}(L_0^*) = \mathcal{D}(L_D) + \text{Ker } L_0^*. \quad (2)$$

Иными словами, каждая вектор-функция $y(t) \in \mathcal{D}(L_0^*)$ представима и притом однозначно в виде $y = z + x$, где $z(t) \in \mathcal{D}(L_D)$, а $x(t)$ такова, что $L_0^* x = 0$.

Сопоставим каждой вектор-функции $y(t) \in \mathcal{D}(L_0^*)$ пару векторов

$$Y = \{\tilde{A}^{-1/4} y(0), -\tilde{A}^{-1/4} y(b)\}, \quad Y' = \{\tilde{A}^{1/4} z'(0), \tilde{A}^{1/4} z'(b)\}, \quad (3)$$

где $z(t) \in \mathcal{D}(L_D)$ соответствует разложению $y(t)$ в виде (2). Используя результаты работы (3), нетрудно показать, что Y и Y' , определяемые формулами (3), принадлежат $H \oplus H$, причем если $q(t) = 0$, то

$$Y' = \{\tilde{A}^{1/4} (y'(0) + \tilde{A}^{1/2} y(0)), \tilde{A}^{1/4} (y'(b) - \tilde{A}^{1/2} y(b))\} + SY,$$

где S — самосопряженный ограниченный оператор в пространстве $H \oplus H$, явный вид которого может быть выписан.

Т е о р е м а 1. *Каков бы ни был линейный ограниченный в пространстве $H \oplus H$ оператор B , граничное условие*

$$Y = BY' \quad (4)$$

определяет в $\mathfrak{H}$ собственное разрешимое расширение $\tilde{L}_B$ оператора L_0 .

Обратно, всякое собственное разрешимое расширение оператора L_0 порождается в $\mathfrak{H}$ операцией $\mathcal{I}[y]$ и граничным условием вида (4).

Т е о р е м а 2. *Предположим, что в выражении (1) оператор A имеет дискретный спектр.*

Тогда, для того чтобы расширение $\tilde{L}_B$ было вполне разрешимым, необходимо и достаточно, чтобы оператор B был вполне непрерывен в $H \oplus H$. Если, кроме того, $A^{-(2p-1)/(2p)} \in \mathfrak{S}_p$ в H , где $\mathfrak{S}_p$, $p \geq 1$, — идеалы Неймана — Шеттена (см. (4)), то $\tilde{L}_B^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ в $\mathfrak{H}$ в том и только в том случае, когда $B \in \mathfrak{S}_p$ в $H \oplus H$.

3. Обозначим через $W(B)$ множество значений ассоциированной с оператором B квадратичной формы: $W(B) = \{(Bj, j)_{H \oplus H}; j \in H \oplus H\}$. Это множество выпукло и вместе с каждой своей точкой содержит весь луч, проведенный через нее из точки 0. Поэтому $W(B)$ есть либо вся комплексная плоскость, либо сектор, величина угла которого $|W(B)|$ равна $\varphi \in [0, \pi]$. Пусть, кроме того, B_R и B_I означают соответственно вещественную и мнимую части ограниченного оператора B .

Т е о р е м а 3. *Пусть операторы A^{-1} и B вполне непрерывны в пространствах H и $H \oplus H$ соответственно и выполняются условия а), б):*

а) сектор $W(B)$ содержит положительную полуось и $|W(B)| = \pi/p$, $p > 1$;

б) $|\lambda_n(B_I)| = o(n^{-1/p})$, $n \rightarrow \infty$,

или в) — д):

в) $B_I \geq 0$ ($B_I \leq 0$);

г) справедливо условие б) при $p=2$;

д) $\lambda_n^-(B_R) = o(n^{-1})$, $n \rightarrow \infty$.

Тогда система с.н.ф. оператор $\tilde{L}_B$ полна в $\mathfrak{H}$.

Здесь $\lambda_n^-(B_R)$ обозначает абсолютную величину n -го отрицательного собственного значения (с учетом кратности) вполне непрерывного самосопряженного в $H \oplus H$ оператора B_R .

Поясним кратко роль условий а), б) и в) — д). Условие а) необходимо для того, чтобы $|W(\tilde{L}_B^{-1})| = \pi/p$, а асимптотическое равенство б) для того, чтобы $|\lambda_n((\tilde{L}_B^{-1})_J)| = o(n^{-1/p})$, $n \rightarrow \infty$. В силу этого оказывается возможным применить теорему М. В. Келдыша — В. Б. Лидского — М. Г. Крейна (см. (4), стр. 305). Замечая, что с.п.ф. у операторов $\tilde{L}_B$ и $\tilde{L}_B^{-1}$ одни и те же, получаем первое утверждение теоремы. Аналогично, условие в) равносильно тому, что $(\tilde{L}_B^{-1})_J \leq 0$ ($(\tilde{L}_B^{-1})_J \geq 0$), а выполнение условия д) влечет за собой справедливость соотношения $\lambda_n^-((\tilde{L}_B^{-1})_R) = o(n^{-1})$, $n \rightarrow \infty$, что позволяет использовать теорему В. И. Мацаева из (6).

Рассмотрим граничную задачу более классического вида (аналог третьей краевой задачи). На множестве всех дважды непрерывно дифференцируемых в H вектор-функций $y(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A)$, для которых $l[y] \in \mathfrak{F}$ и удовлетворяется условие

$$\hat{Y}' = C\hat{Y},$$

где $\hat{Y} = \{y(0), -y(b)\}$, $\hat{Y}' = \{y'(0), y'(b)\}$, а C — ограниченный линейный оператор в $H \oplus H$, зададим оператор L_c' : $L_c'y = l[y]$. Замыкание оператора L_c' в пространстве $\mathfrak{F}$ обозначим через L_c . В случае, когда $C_J \geq 0$ ($C_J \leq 0$) и $A^{-1} \in \mathfrak{S}_{\frac{p}{2}}$ в H , М. Л. Горбачуком в (7) было установлено, что система с.п.ф. оператора L_c полна в $\mathfrak{F}$. Непосредственным развитием этого результата является.

Теорема 4. Пусть $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, $p < \infty$, в H , тогда система с.п.ф. оператора L_c полна в $\mathfrak{F}$ и для каждого элемента $y(t) \in \mathcal{D}(L_c)$ соответствующий ему формальный ряд Фурье по системе с.п.ф. оператора L_c суммируем к $y(t)$ методом Абеля порядка α , где $\alpha \geq p + 1/2$.

(Относительно определения метода см. (8).)

Автор благодарен М. Л. Горбачуку за внимание к работе.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
11 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. И. Вишик, Тр. Московск. матем. общ., т. 1, 487 (1952). ² М. Г. Крейн, Матем. сборн., т. 21, 3, 365 (1947). ³ М. Л. Горбачук, Функциональн. анализ и его приложения, т. 5, в. 1 (1971). ⁴ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965. ⁵ Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. ⁶ В. И. Мальцев, ДАН, т. 155, № 2, 273 (1964). ⁷ М. Л. Горбачук, Функциональн. анализ и его приложения, т. 7, в. 1, 68 (1973). ⁸ В. Б. Лидский, Тр. Московск. матем. общ., т. 11, 3 (1962).