Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 1

УДК 517.392

МАТЕМАТИКА

И. В. БОЙКОВ

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРАТНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 8 IV 1974)

Оптимальные алгоритмы вычисления обыкновенных интегралов изучались в ([1-3]), а одномерных сингулярных в ([4]). Целью данной заметки является построение оптимальных алгоритмов для вычисления кратных сингулярных интегралов.

Пусть $H_{\alpha,\ldots,\alpha}(c)$ — класс функций s переменных, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α и коэффициентом c по каждой переменной; классы функций E_s^α, H_s^α, D_s^α введены в ([3]).

Рассмотрим сингулярный интеграл (с.и.)

$$S(\varphi)=(\pi i)^{-s}\int\limits_{\gamma_1}\ldots\int\limits_{\gamma_s}\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_s)(\tau_1-t_1)^{-1}\ldots(\tau_s-t_s)^{-1}d\tau_1\ldots d\tau_s, \qquad (1)$$

где γ_i — единичная окружность с центром в начале кординат, $i=1,2,\ldots,s$.

Поставим интегралу (1) в соответствие квадратурную формулу (к.ф.)

$$I(\varphi)=$$

$$=\frac{2^s}{N}\sum_{k=1}^{N}{}'\ \varphi(e^{i\varepsilon_1(k)},\ldots,e^{i\varepsilon_s(k)})e^{i(\varepsilon_1(k)+\ldots+\varepsilon_s(k))}(e^{i\varepsilon_1(k)}-e^{is_1})^{-1}\ldots(e^{i\varepsilon_s(k)}-e^{is_s})^{-1}+R, \qquad (2)$$

где $M_k=(\varepsilon_1(k),\ldots,\varepsilon_s(k))$, $k=1,2,\ldots,N$,— сетка, точки M_k — узлы к.ф.; $\sum'$ означает, что суммирование проводится по k таким, что $\varepsilon_i(k)$, $\varepsilon_i(k\pm1)\not\subset$ $\not\subset[s_i\pm\min\limits_k|\varepsilon_i(k)-\varepsilon_i(k-1)|]$, $t_j=e^{is_j}$, $\tau_j=e^{i\sigma_j}$.

Теорема 1. *При любом $N>1$ для всякой сетки M_k, $k=1,2,\ldots,N$, найдутся функции $\varphi(t_1,\ldots,t_s)$, принадлежащие классам $H^s_{\alpha,\ldots,\alpha}(c)$, H_s^α, D_s^α и такие, что погрешность к.ф. (2) удовлетворяет неравенству $|R|\geqslant$ $\geqslant 2^{s(\alpha+1)}c^s s^{-s}\pi^{s(\alpha-1)}N^{-\alpha}\ln^s N$ в случае $\varphi\in H^s_{\alpha,\ldots,\alpha}(c)$ и $|R|\geqslant O(N^{-\alpha}\ln^s N)$ в случае $\varphi\in H_s^\alpha, D_s^\alpha$.*

Доказательство приведем лишь для случая $\varphi\in H_{\alpha,\ldots,\alpha}(c)$. Пусть D — s-мерный куб $[0,2\pi;\ldots;0,2\pi]$. Выберем целое n из условия $n=[(2N)^{1/s}+1]$ ($[\alpha]$ — антье α) и разделим каждую из сторон куба на n равных частей. Так как $n^s\geqslant 2N$, то имеется по крайней мере N кубов, не содержащих внутри себя ни одной точки M_k. Выделим эти кубы и внутри них построим функцию $\varphi^*(t_1,\ldots,t_s)=\varphi_1^*(t_1)\varphi_2^*(t_2)\ldots\varphi_s^*(t_s)$ следующим образом. Пусть $(\theta_1^{(k)},\ldots,\theta_s^{(k)})$ — координаты той вершины k-го куба, которая будет ближайшей к началу координат. Определим $\varphi_i^*(\tau_i)$, следуя ([4]):

$$\varphi_i^*(\tau_i)=g_i^*(\sigma_i)=$$

$$=\begin{cases} c(\sigma_i-\theta_i^{(k)})^\alpha \text{ при } \sigma_i\in[\theta_i^{(k)},\theta_i^{(k)}+(2n)^{-1}],\\ c(\theta_i^{(k)}+n^{-1}-\sigma_i)^\alpha \text{ при } \sigma_i\in[\theta_i^{(k)}+(2n)^{-1},\theta_i^{(k)}+n^{-1}], \text{ если } \operatorname{ctg}{}^1/_2(\sigma_i-s_i)<0;\\ -c(\sigma_i-\theta_i^{(k)})^\alpha \text{ при } \sigma_i\in[\theta_i^{(k)},\theta_i^{(k)}+(2n)^{-1}], \text{ если } \operatorname{ctg}{}^1/_2(\sigma_i-s_i)\geqslant0;\\ -c(\sigma_i-\theta_i^{(k)})^\alpha \text{ при } \sigma_i\in[\theta_i^{(k)},\theta_i^{(k)}+(2n)^{-1}], \text{ если } \operatorname{ctg}{}^1/_2(\sigma_i-s_i)<0; \end{cases}$$

Найдем $\psi^*(t_1,\ldots,t_s)=S(\varphi^*)$. Имеем

$$\max_{t_1,\ldots,t_s}|\psi^*(t_1,\ldots,t_s)|\geqslant|\psi^*(1,\ldots,1)|\sim$$

$$\sim\left|\sum_{k_1=0}^{n}{}'\ldots\sum_{k_s=0}^{n}{}'(\pi i)^{-s}\int\limits_{k_1/n}^{(k_1+1)/n}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\int\limits_{k_s/n}^{(k_s+1)/n}\frac{\varphi_1{}^*(\tau_1)\varphi_2{}^*(\tau_2)\ldots\varphi_s{}^*(\tau_s)}{(\tau_1-1)(\tau_2-1)\ldots(\tau_s-1)}d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_s\right|=$$

$$=\left|\sum_{k_1=0}^{n}{}'(\pi i)^{-1}\int\limits_{k_1/n}^{(k_1+1)/n}\frac{\varphi_1{}^*(\tau)}{\tau_1-1}d\tau_1\right|^s,$$

где $\sum'$ означает суммирование по выделенным кубам.

Используя рассуждения [4], убеждаемся, что для каждого сомножителя справедлива оценка $\sim(2^{1+\alpha}c\pi^{\alpha-1}/(n^\alpha(\alpha+1)))\ln n$ и, следовательно,

$$|\psi^*(1,\ldots,1)|\sim2^{s(\alpha+1)}(\alpha+1)^{-s}s^{-s}c^s\pi^{s(\alpha-1)}N^{-\alpha}\ln^s N.$$

Теорема 2. *При любом $N>1$ для всякой сетки $M_k=(\varepsilon_1(k),\ldots,\varepsilon_s(k))$, $k=1,2,\ldots,N$, найдется функция $\varphi(t_1,\ldots,t_s)\in E_s^\alpha$, $\alpha>1$, такая, что погрешность к.ф.* (2) *удовлетворяет неравенству $|R|\geqslant O(N^{-(\alpha-1)})$.*

Доказательство. Как и выше, выделим N кубов, не содержащих точек сетки M_k. Аналогично вводятся координаты $(\theta_1^{(k)},\ldots,\theta_s^{(k)})$.

В выделенном кубе вводится функция

$$\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)=\varphi(\sigma_1-\theta_1^{(k)})\ldots\varphi(\sigma_s-\theta_s^{(k)}),$$

где

$$\varphi(\sigma_i-\theta_i^{(k)})=$$

$$=\begin{cases}n^{-1}\sin\pi n(\sigma_i-\theta_i^{(k)}),\ \text{если}\ \theta_i^{(k)}\leqslant\sigma_i\leqslant\theta_i^{(k)}+1/n,\quad \operatorname{ctg}{}^1/_2(\sigma_i-s_i)>0,\\ -n^{-1}\sin\pi n(\sigma_i-\theta_i^{(k)}),\ \text{если}\ \theta_i^{(k)}\leqslant\sigma_i\leqslant\theta_i^{(k)}+1/n,\quad \operatorname{ctg}{}^1/_2(\sigma_i-s_i)<0;\end{cases}$$

$\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)=0$ в остальных кубах.

Известно [3], что $\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)\in E_s^\alpha$. Обозначив $\psi(t_1,\ldots,t_s)=S(\varphi)$, имеем

$$\psi(t_1,\ldots,t_s)|\geqslant|\psi(1,\ldots,1)|=|2\int\limits_{\theta_1^{(k)}}^{\theta^{(k)}+1/n}\frac{\varphi(\sigma_1-\theta_1^{(k)})}{(e^{i\sigma_1}-1)}e^{i\sigma_1}d\sigma_1|^s\sim2^sN^{-(\alpha-1)}.$$

Пусть $P^{n\ldots n}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_2}[\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)]=P_{\sigma_1}{}^n[P_{\sigma_2}{}^n\cdots[P_{\sigma_s}{}^n[\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)]\ldots]$, где $P_{\sigma\,i}{}^n$ — оператор проектирования на множество интерполяционных тригонометрических полиномов степени не выше n по узлам $s_k=2k\pi/(2n+1)$, $k=0,1,\ldots,2n$, и по переменной σ_i.

Теорема 3. *Пусть $N=n^s$. Если $\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)\in D_s^\alpha$, то для к.ф.*

$$(2\pi)^{-s}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}[\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)-P^{n\ldots n}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_s}[\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)]]\times$$

$$\times\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\ldots\operatorname{ctg}\frac{\sigma_s-s_s}{2}d\sigma_1\ldots d\sigma_s=R\qquad(3)$$

справедлива оценка $|R|=O(N^{-\alpha}\ln^s N)$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из определения класса функций D_s^α и оценок для интерполяционных полиномов ([5]).

К.ф. (3) является оптимальной по порядку для функций класса D_s^α, но не является таковой для функций класса E_s^α, H_s^α, $H^s_{\alpha,\dots,\alpha}$.

Теорема 4. *Пусть $N=n^s$. Если $\varphi(s_1,\dots,s_s)$ принадлежит классам функций H_s^α, $H^s_{\alpha,\dots,\alpha}$, то для к.ф.* (3) *справедлива оценка* $|R|=O(N^{-\alpha/s}\ln^s N)$, *причем эта оценка является достижимой.*

Рассмотрим с.и. с ядром Гильберта

$$U(\varphi)=(2\pi)^{-s}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma_1,\dots,\sigma_s)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\dots\operatorname{ctg}\frac{\sigma_s-s_s}{2}d\sigma_1\,d\sigma_2\dots d\sigma_s.$$

Если $\varphi(\sigma_1,\dots,\sigma_s)$ зависит от меньшего числа переменных σ_i, чем s, то $U(\varphi)=0$. Построим функцию $\psi(\sigma_1,\dots,\sigma_s)$ следующим образом. Если $s=1$, то $\psi(\sigma_1)=\varphi(\sigma_1)-\varphi(s_1)$. Если $s=2$, то $\psi(\sigma_1,\sigma_2)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-\varphi(s_1,\sigma_2)-[\varphi(\sigma_1,s_2)-\varphi(s_1,s_2)]$. Построение функции $\psi(\sigma_1,\dots,\sigma_s)$ очевидно. Пусть $\varphi\in E_s^\alpha$. Можно показать, что $\psi(\sigma_1,\dots,\sigma_s)\operatorname{ctg}{}^1/_2(\sigma_1-s_1)\dots\operatorname{ctg}{}^1/_2(\sigma_s-s_s)\in E_s^{\alpha-1}$, а так как $U(\varphi)=U(\psi)$, то применение к интегралу $U(\psi)$ к.ф., построенной на узлах параллелепипедальной сетки ([3]), дает погрешность $O(N^{-(\alpha-1)}\ln^{(\alpha-1)\beta}N)$ (β — индекс оптимальных коэффициентов). Сравнивая эту оценку с результатом теоремы 2, убеждаемся, что предлагаемая к.ф. является близкой к оптимальной.

Пусть $\varphi\in H_s^\alpha$. Если производные порядка (αs) от функции φ удовлетворяют условию Гёльдера в окрестности точки $(s_1,\dots,s_s)$ или, более обще, если существуют интегралы $U(\varphi^{(\alpha s)}_{s_1,\dots,s_s})$, то, применив к интегралу $U(\psi)$ (ψ построена выше) к.ф., построенную на узлах параллелепипедальной сетки ([3]), получаем погрешность в вычислении $U(\varphi)$, равную $O(N^{-\alpha}\ln^{\alpha\beta}N)$. Если же указанные интегралы не существуют, то поступим иначе. Представим $\varphi(\sigma_1,\dots,\sigma_s)$ в виде $\varphi(\sigma_1,\dots,\sigma_s)=\eta(\sigma_1,\dots,\sigma_s)+\delta(\sigma_1,\dots,\sigma_s)$, где $\eta(\sigma_1,\dots,\sigma_s)\in H_s^\alpha$ и такая, что $\eta(\sigma_1,\dots,\sigma_s)=\varphi(\sigma_1,\dots\sigma_s)$, если $\sigma_k\not\in(s_k-N^{-1/s},\ s_k+N^{-1/s})$, $k=1,2,\dots,s$, (αs) производные функции $\eta(\sigma_1,\dots,\sigma_s)$ удовлетворяют условию Гёльдера в $(N^{-1/s})$ окрестности точки $(s_1,\dots,s_s)$. Построение функции $\delta(\sigma_1,\dots,\sigma_s)$ очевидно. Тогда $U(\varphi)=U(\eta)+U(\delta)$.

К первому интегралу применяем описанный выше алгоритм. В результате получаем погрешность $O(N^{-\alpha}\ln^{\alpha\beta}N)$. Во втором интеграле функцию $\delta(\sigma_1,\dots,\sigma_s)$ заменяем полиномом $P^{N\dots N}_{\sigma_1,\dots,\sigma_s}[\delta(\sigma_1,\dots,\sigma_s)]$. Погрешность такой к.ф. есть $O(N^{-\alpha}\ln^s N)$. Из построения $\delta(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_s)$ видно, что в этой к.ф. используется только N значений функции δ и, следовательно, φ. Остальные значения равны 0. Таким образом, описанный алгоритм дает к.ф., близкую к оптимальной.

Предположим теперь, что ядро с.и. (1) принадлежит множеству $F=F_\rho^s$ аналитических в области $E_\rho=E_{\rho_1}\times E_{\rho_2}\times\dots\times E_{\rho_s}$ функций, суммируемых на границе, где E_{ρ_k} есть область комплексной плоскости $z_k=x_k+iy_k$, ограниченная эллипсом ∂_{ρ_k} с полусуммой осей ρ_k и с фокусами в точках $(1,-1)$, причем единичная окружность $\gamma_k\in\partial_{\rho_k}$, $k=1,2,\dots,s$.

Теорема 5. *Если $N=n^s$, то для всякой сетки M_k, $k=1,2,\dots,N$, найдется функция $\varphi(t_1,t_2,\dots,t_s)\in F$ такая, что погрешность к.ф.* (2) *оценивается величиной* $|R|\geqslant O(1/\min\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\rho_k)^n)$. *С другой стороны, к.ф.* $S(\varphi)=S(P^{n\dots n}_{\sigma_1,\dots,\sigma_s}[\varphi(\sigma_1,\dots,\sigma_s)])+R$ *имеет погрешность* $|R|=O((\min\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\rho_k)^{-n}\times\ln^s n$.

Доказательство. Так как $\varphi(t_1,t_2,\dots,t_s)$ — аналитическая внутри $\gamma_1\times\gamma_2\times\dots\times\gamma_s$, то по теореме Сохоцкого $S(\varphi)=2^{-s}\varphi(t_1,t_2,\dots,t_s)$. Поэтому, если для к.ф. (2) на классе функций F справедлива оценка, лучшая, чем приведенная в теореме, то эта к.ф. может быть применена в качестве оптимального алгоритма минимизации функций. Известно ([6]), что оптимальный алгоритм минимизации функций в классе F, использующий N значений функции φ, имеет погрешность $O(1/(\min\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\rho_k)^n)$. Поэтому существует функция $\varphi\in F$, на которой $|R|$ больше или равна величине $O(1/(\min\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\rho_k)^n)$. Второе утверждение теоремы следует из оценок интерполяции аналитических функций по равностоящим узлам ([5]).

Замечание. Если рассмотреть класс функций F_ρ, аналитических в топологическом произведении колец $1/\rho\leqslant|z_k|\leqslant\rho$, то в условиях теоремы 5 можно утверждать, что для к.ф. (2) справедлива оценка $|R|\geqslant\geqslant O(\rho^{-n})$, а для приведенной в теореме 5 к.ф. справедлива оценка $O(\rho^{-n}\ln^s n)$.

Остановимся на применении метода Монте-Карло к с.и. Заменой переменных с.и. (1) сводится к интегралу

$$\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1\varphi(x_1,\ldots,x_s)\,x_1^{-1}x_2^{-1}\ldots x_s^{-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_s.$$

В достаточно широких классах функций φ справедливо равенство

$$\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1\frac{\varphi(x_1,\ldots,x_s)}{x_1x_2\ldots x_s}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_s=$$

$$=\int\limits_0^\infty\ldots\int\limits_0^\infty\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_s)\,e^{-p_1x_1-\ldots-p_sx_s}\,dp_1\ldots dp_s\,dx_1\ldots dx_s.$$

К правой части равенства применим метод Монте-Карло.

Пензенский политехнический
институт

Поступило
8 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. М. Никольский*, Квадратурные формулы, М., 1958. [2] *Н. С. Бахвалов*, Вестн. Московск. унив., № 4, 3 (1959). [3] *Н. М. Коробов*, Теоретико-числовые методы в приближенном анализе, М., 1963. [4] *В. В. Иванов*, ДАН, т. 204. № 1, 21 (1972). [5] *В. В. Иванов*, Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, Киев, 1968. [6] *В. В. Иванов*, Кибернетика, т. 4, 1972.