

УДК 517.512.2

МАТЕМАТИКА

А. Б. ГУЛИСАШВИЛИ

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА СЛАБОГО ТИПА И ПОВЕДЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ, ИМЕЮЩЕЙ ЗАДАННЫЕ ЛЕБЕГОВСКИЕ МНОЖЕСТВА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 20 V 1974)

В настоящей заметке мы усиливаем известную интерполяционную теорему (см. ⁽²⁾, стр. 264) следующим образом: ограниченность линейного оператора T на заданной паре пространств Лоренца предполагается только на некотором семействе H характеристических функций, что позволяет интерполировать на промежуточное пространство Лоренца, пересеченное с замкнутым выпуклым конусом, порожденным H . В качестве следствий получаются теоремы интегрируемости для обобщенного преобразования Фурье функций, у которых все лебеговские множества — шары или многогранники в R^n .

Предположим, что (X_0, Ω_0, μ_0) и (X_1, Ω_1, μ_1) — пространства с неотрицательной σ -конечной мерой. Через $L(p, q)$, как обычно, будет обозначаться пространство Лоренца, а через $\|\cdot\|_{p,q}^*$ — функционал, порождающий топологию $L(p, q)$ (см. ⁽²⁾, стр. 253), причем мы не будем пояснять, над каким $X_i, i=0, 1$, строится $L(p, q)$, если это ясно из контекста.

Пусть $Y_i, i=0, 1$, — линейные топологические пространства, а $T: Y_0 \rightarrow Y_1$ — линейный оператор, переводящий всякую последовательность $\{\tau_n\}$, сходящуюся в Y_0 к τ , в последовательность $\{T\tau_n\}$, сходящуюся в Y_1 к $T\tau$.

Предположим еще, что заданы числа $p(i), q(i), 0 < p(i) < \infty, 0 < q(i) \leq \infty, i=1, 2, p(0) < p(1), q(0) \neq q(1)$ и что справедливы непрерывные вложения $L(p(i), 1) \subset Y_0, L(q(i), \infty) \subset Y_1, i=0, 1$, где $L(p(i), 1)$ строится над X_0 , а $L(q(i), \infty)$ — над X_1 .

Рассмотрим некоторое семейство Z измеримых относительно μ_0 множеств, которые имеют конечную меру и удовлетворяют следующим условиям: 1) $\phi \in Z$, где ϕ — пустое множество; 2) если $z_1, z_2 \in Z$, то или $\mu_0(z_1 \setminus z_2) = 0$, или $\mu_0(z_2 \setminus z_1) = 0$; 3) если $z_1 \in Z$ и $\mu_0(z_1 \Delta z_2) = 0$, где Δ — симметрическая разность множеств, то $z_2 \in Z$; 4) Z замкнуто относительно взятия не более чем счетных объединений и пересечений его элементов. Обозначим через H семейство характеристических функций элементов Z . Предположим, что T переводит $H \subset L(p(i), 1)$ в $L(q(i), \infty)$ ограниченно, т. е.

$$\|T\chi\|_{q(i), \infty}^* \leq M_i \|\chi\|_{p(i), 1}^*, \quad i=0, 1, \quad \chi \in H. \quad (1)$$

Нам понадобится еще несколько обозначений: через $K(H)$ будет обозначаться выпуклый конус, порожденный H , т. е. множество всевозможных линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами элементов H , а через $\bar{K}(p, q, H)$ — замкнутый выпуклый конус, порожденный H в $L(p, q)$, он совпадает с замыканием $K(H)$ в $L(p, q)$. Сделаем предположение о минимальной непрерывности оператора T : он должен переводить всякую возрастающую последовательность элементов $K(H)$, сходящуюся почти всюду на X_0 к ограниченной и обращающейся в нуль вне множества конечной меры функции f , в последовательность, сходящуюся по мере μ_1 к Tf .

Если функция f определена на некотором пространстве с мерой, измерима и неотрицательна, то через $E(y; f)$, $y > 0$, будут обозначаться лебеговские множества f ; по определению $E(y; f) = \{x: f(x) > y\}$; через χ_y будет обозначаться характеристическая функция $E(y; f)$, а через f^* — перестановка f в невозрастающем порядке на $(0, \infty)$ (см. ⁽²⁾, стр. 251).

Имеет место следующая интерполяционная

Теорема 1. Пусть выполняются все отмеченные выше условия на $p(i)$, $q(i)$ и оператор T и пусть $0 < \theta < 1$,

$$\frac{1}{p(\theta)} = \frac{1-\theta}{p(0)} + \frac{\theta}{p(1)}, \quad \frac{1}{q(\theta)} = \frac{1-\theta}{q(0)} + \frac{\theta}{q(1)}.$$

Тогда

$$\|Tf\|_{q(\theta),s}^{\bullet} \leq M_{\theta,s} \|f\|_{p(\theta),s}^{\bullet} \quad (2)$$

для всех $f \in \bar{K}(p(\theta), s, H)$, $0 < s \leq \infty$.

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. Конус $\bar{K}(p, q, H)$ совпадает с множеством всевозможных неотрицательных функций f из $L(p, q)$ таких, что $E(y; f) \in H$ для всех $y > 0$.

Доказательство. Определим нижнюю срезку функции f на уровне α при помощи равенства

$$\bar{f}_\alpha(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leq \alpha, \\ \alpha, & \text{если } f(x) > \alpha, \end{cases} \quad (3)$$

и верхнюю срезку $\bar{f}^\alpha(x) = f(x) - \bar{f}_\alpha(x)$.

Если $f \in L(p, q)$ и $E(y; f) \in H$ для всех $y > 0$, то легко проверить, что $E(y; \bar{f}_\alpha) \in H$, $E(y; \bar{f}^\alpha) \in H$ для всех $y > 0$, $\alpha > 0$. Кроме того справедливо равенство

$$\bar{f}_\alpha(x) = \int_0^\alpha \chi_y(x) dy. \quad (4)$$

Интегральные суммы интеграла в правой части (4) принадлежат $K(H)$, и можно найти возрастающую последовательность таких сумм, сходящуюся почти всюду к $\bar{f}_\alpha$. Тогда имеет место сходимость в $L(p, q)$, и $\bar{f}_\alpha \in K(p, q, H)$ для всех α . Отсюда следует, что $f \in \bar{K}(p, q, H)$.

Обратно, если $f \in K(p, q, H)$, то существует последовательность $\{\tau_n\}$ элементов $K(H)$, сходящаяся в $L(p, q)$ к f . Ясно, что $E(y; \tau_n) \in H$ для всех y и n (это следует из свойства 2) семейства Z). Из последовательности τ_n можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду, а предел почти всюду сходящейся последовательности функций, имеющих лебеговские множества из H , также обладает этим свойством ввиду свойств семейства H . Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Сначала докажем теорему о продолжении оператора, аналогичную теореме (2.5) из ⁽²⁾, стр. 259. Покажем, что из неравенств (1) следует, что

$$\|Tf\|_{q(i),\infty}^{\bullet} \leq M_i \|f\|_{p(i),1}^{\bullet}, \quad i=0,1, \quad (5)$$

для всех $f \in \bar{K}(p(i), 1, H)$.

Действительно, при помощи рассуждений, использованных при доказательстве цитированной теоремы (2.5) из работы ⁽²⁾ и теоремы (1.5) из той же работы, мы докажем неравенства (5) для всех $f \in K(H)$.

Пусть теперь $\tau_n \in K(H)$, $n=1, \dots, \infty$, и τ_n сходится почти всюду, возрастающая, к функции g , ограниченной и сосредоточенной на множестве конечной меры. Тогда ввиду предположения относительно T , имеем $T\tau_n \rightarrow Tg$ по мере, а отсюда следует, что

$$\|Tg\|_{g(i),\infty}^{\bullet} \leq \sup_n \|T\tau_n\|_{q(i),\infty}^{\bullet} \leq M_i \sup_n \|\tau_n\|_{p(i),1}^{\bullet} \leq M_i \|g\|_{p(i),1}^{\bullet}. \quad (6)$$

При доказательстве (6) было использовано несложно проверяемое свойство пространств $L(p, \infty)$, которое заключается в следующем: если $f_n \rightarrow f$ по мере и $\|f_n\|_{p, \infty} < M$, то $\|f\|_{p, \infty}^* < M$.

Далее, для любых α и β таких, что $0 < \alpha < \beta_\infty$ разность $\bar{f}_\beta - \bar{f}_\alpha$ удовлетворяет требованиям, наложенным на g в доказанном выше неравенстве (6), значит,

$$\|T\bar{f}_\beta - T\bar{f}_\alpha\|_{q(i), \infty}^* \leq M_i \|\bar{f}_\beta - \bar{f}_\alpha\|_{p(i), 1}^*.$$

Отсюда предельным переходом в $L(p(i), 1)$, используя непрерывность T из Y_0 в Y_1 и вложения $L(p(i), 1) \subset Y_0$, $L(q(i), \infty) \subset Y_1$, получаем (5).

Теперь теорема 1 выводится из неравенств (5) при помощи рассуждений, использованных при доказательстве интерполяционной теоремы слабого типа в работе (2). Необходимо только заметить, что срезки f_t, f^t функции f на уровне $\tau = f^*(t^\gamma)$, где $\gamma = [1/q(0) - 1/q(1)]/[1/p(0) - 1/p(1)]$, определенные в (2) на стр. 264, связаны со срезками $\bar{f}_\tau, \bar{f}^\tau$, определенными равенством (3), при помощи соотношений $\bar{f}^\tau(x) \leq f^*(x)$, $\bar{f}_\tau(x) = f_t(x) + \tau \chi_\tau(x)$.

На этом доказательство теоремы 1 заканчивается.

Применим теорему 1 к случаю, когда $X_0 = X_1 = R^n$, где R^n — n -мерное евклидово пространство; $\mu_0 = \mu_1 = \mu$, где μ — мера Лебега на R^n ; $Y_0 = Y_1 = S'(R^n)$, где S' — пространство медленно растущих обобщенных функций со слабой топологией (см. (1), стр. 212); T — оператор, ставящий в соответствие обобщенной функции f из S' ее преобразование Фурье $\hat{f}$ (см. (1), стр. 214). Известно, что T переводит в S' сходящиеся последовательности в сходящиеся (см. (1), стр. 215).

Рассмотрим два случая: 1) каждый элемент Z совпадает μ -почти всюду с некоторым шаром в R^n ; 2) каждый элемент Z совпадает μ -почти всюду с некоторым многогранником в R^n . Для первого случая (при $n \geq 2$) $p(0) = 1$, $p(1) = 2n/(n-1)$, $q(0) = \infty$, $q(1) = 2n/(n+1)$, а для второго (при $n \geq 1$) $p(0) = 1$, $p(1) = r$, $q(0) = \infty$, $q(1) = r'$, где r — любое фиксированное число, большее 1, а $1/r + 1/r' = 1$.

Действительно, известно, что для шара B с центром в начале координат и радиусом h преобразование Фурье характеристической функции находится по формуле

$$\hat{\chi}_B(x) = c_n \frac{h^{n/2} J_{n/2}(h\|x\|)}{\|x\|^{n/2}},$$

где $\|\cdot\|$ — норма в R^n , а $J_{n/2}$ — функция Бесселя, а отсюда, ввиду известных оценок для функции Бесселя,

$$\|\hat{\chi}_B\|_{2n/(n+1), \infty}^* \leq c_n' \|\chi_B\|_{2n/(n-1), 1}^*.$$

Остальные свойства оператора T , требуемые в условиях теоремы 1, следуют из того, что T непрерывен из $L(1, 1)$ в $L(\infty, \infty)$.

Во втором случае для прямоугольного параллелепипеда P в R^n со сторонами, параллельными координатным осям, и с центром в начале координат несложно доказать расширенное неравенство Хаусдорфа — Юнга

$\|\hat{\chi}_P\|_{r', r'}^* \leq c_r' \|\chi_P\|_{r, r}^*$, а отсюда $\|\hat{\chi}_P\|_{r', \infty}^* \leq c_r' \|\chi_P\|_{r, 1}^*$ ввиду теорем вложения для пространств Лоренца (см. (2), стр. 253, (1.8)). Далее, замечаем, что последнее неравенство сохраняется, если вместо P брать его образ при невырожденных линейных преобразованиях и сдвигах. Отсюда следует, что оно верно и для симплексов (симплекс — это выпуклая оболочка множества, состоящего из $(n+1)$ -й точки, которые не лежат в одной гиперплоскости), с постоянной, не зависящей от симплекса, так как симплекс является пересечением двух параллелепипедов.

Теперь можно доказать, что для любого многогранника M

$$\|\hat{\chi}_M\|_{r',\infty}^{\bullet} \leq c_r [\Delta(M)]^{1-1/r} \|\chi_M\|_{r,1}^{\bullet},$$

где $\Delta(M)$ — наименьшее число симплексов, на которые можно разбить M .

Из этих рассуждений и из теоремы 1 следует

Теорема 2. 1) Если функция f такова, что все ее лебеговские множества — шары в R^n , то для $1 < p < 2n/(n-1)$, $0 < s \leq \infty$ имеем

$$\|\hat{f}\|_{p',s}^{\bullet} \leq c \|f\|_{p,s}^{\bullet}, \quad (7)$$

где $1/p + 1/p' = 1$, а c зависит только от n , p и s .

2) Если функция f такова, что каждое ее лебеговское множество — многогранник в R^n , причем $\sup_v [\Delta(E(y; f))] = \alpha < \infty$, то для $1 < p < \infty$, $0 < s \leq \infty$

имеем

$$\|\hat{f}\|_{p',s}^{\bullet} \leq c \|f\|_{p,s}^{\bullet},$$

где c зависит только от n , p , s и α .

З а м е ч а н и е 1. Известно, что при $1 < p < 2$ неравенства (7) и (8) справедливы для любых функций f (см. ⁽²⁾, стр. 270).

З а м е ч а н и е 2. Теорема 2 содержит два типа заключений: о регулярности обобщенного преобразования Фурье функции f и о выполнении неравенств (7) и (8). Напомним, что обобщенная функция регулярна, если она порождается локально интегрируемой функцией.

Теорема 2 допускает обращение в более широких условиях. Точнее, справедлива

Теорема 3. Пусть функция f имеет лебеговские множества, удовлетворяющие условию $[\text{diam } E(y; f)]^n \leq \varepsilon \mu E(y; f)$, где постоянная ε не зависит от y , и пусть обобщенное преобразование Фурье функции f регулярно.

Тогда для $1 < p < \infty$, $0 < s \leq \infty$ выполняется неравенство

$$\|f\|_{p',s}^{\bullet} \geq c \|\hat{f}\|_{p,s}^{\bullet},$$

где c зависит только от n , p , s и ε .

З а м е ч а н и е 3. Конечно, $\text{diam } E(y; f)$ — это существенный диаметр, т. е. $\inf_A (\text{diam } A)$, где A совпадает с $E(y; f)$ почти всюду.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
24 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ К. Иосида, Функциональный анализ, М., 1967. ² R. A. Hunt, Enseign. math., v. 12, 4, 249 (1966).