

В. В. ПАШЕНКОВ

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 8 V 1974)

Пусть $\{H_m^n\}$ — набор предикатных символов, в который для каждой упорядоченной пары целых неотрицательных чисел (n, m) , удовлетворяющих условию $n+m \geq 1$, входит один $(n+m)$ -арный символ H_m^n . Условимся вместо $H_m^n(x^1, x^2, \dots, x^n; x_1, x_2, \dots, x_m)$, $H_m^{n+1}(x, x^1, x^2, \dots, x^n; x_1, x_2, \dots, x_m)$, $H_{m+1}^n(x^1, x^2, \dots, x^n; x_1, x_2, \dots, x_m, x)$ писать $H_m^n(x^i; x_j)$, $H_m^{n+1}(x, x^i; x_j)$, $H_{m+1}^n(x^i; x_j, x)$ соответственно. Обозначим через $\mathfrak{M}$ квазимногообразие моделей сигнатуры $\{H_m^n\}$, определяемое следующей системой квазитожеств (для всех $H_m^n \in \{H_m^n\}$):

1) $H_m^n(x^i; x_j) \Rightarrow H_m^n(x^{\tau(i)}; x_{\sigma(j)})$, где τ, σ — всевозможные подстановки чисел $1, 2, \dots, n; 1, 2, \dots, m$ соответственно.

2) $(x^1 = x_1) \Rightarrow H_m^n(x^i; x_j)$.

3) $H_m^n(x^i; x_j) \Leftrightarrow H_m^{n+1}(x, x^i; x_j) \& H_{m+1}^n(x^i; x_j, x)$.

Топологическое пространство P , в котором открыто-замкнутые множества образуют базу открытых множеств ($\text{ind } P = 0$), будем называть просто пространством.

Через $\emptyset$ обозначаем пустое множество. Всюду дальше под моделью будем понимать модель квазимногообразия $\mathfrak{M}$, носитель которой является одновременно пространством, а под гомоморфизмом моделей — гомоморфизм, являющийся непрерывным отображением носителей. Модель будем называть дискретной или бикompактной, если таковым является пространство ее носителя. Приведем примеры.

1) Пусть P — пространство. Определим для всех предикатных символов $H_m^n \in \{H_m^n\}$ предикаты на P , считая для любых подмножеств $p^1, p^2, \dots, p^n; p_1, p_2, \dots, p_m \in P$ значение $H_m^n(p^i; p_j) = \Pi$ (истиной) тогда и только тогда, когда $p^i = p_j$ для некоторых i и j . В результате получим модель P . Таковую модель и систему предикатов на ней будем называть тривиальными.

2) Пусть A — булева алгебра и $\{I_a\}$ — такая система максимальных идеалов алгебры A , пересечение которых содержит лишь нуль алгебры A . Взяв систему $\{I_a\}$ за предбазу окрестностей нуля, определим на A вполне линейную топологию. Предикаты на A определим так: $H_m^n(a^i; a_j) \Leftrightarrow (\inf \{a^i\} \cdot \inf \{a_j'\} = 0)$. Здесь a_j' обозначает дополнение в A к элементу a_j ; 0 — нуль алгебры A .

Обозначение D закрепим за двухэлементарной булевой алгеброй $D = \{0, 1\}$, рассматриваемой как модель примера 2.

Определение 1. Гомоморфизм $x: P \rightarrow D$ назовем характером модели P . Пусть X — множество всех характеров модели P и $x_0 \in X$. Приняв множества

$$U(x_0; p_1, \dots, p_k) = \{x \in X: x(p_1) = x_0(p_1), \dots, x(p_k) = x_0(p_k)\}$$

для всевозможных конечных наборов элементов $p_1, \dots, p_k \in P$ за базу окрестностей точки x_0 , превратим X в пространство. Для каждого символа H_m^n определим на X предикат:

$$H_m^n(x^i; x_j) \Leftrightarrow [(\forall p \in P) H_m^n(x^i(p); x_j(p))].$$

Полученную модель (очевидно, относящуюся к рассматриваемому нами классу) назовем моделью характеров модели P и обозначим $\chi(P)$.

Обозначения $\chi(\chi(P))$, $\chi(\chi(\chi(P)))$ и т. д. будем упрощать и писать соответственно $\chi^2(P)$, $\chi^3(P)$ и т. д.

Лемма 1. Для любой модели P все предикаты модели $\chi(P)$ удовлетворяют для любых $\{x^i\}$, $\{x_j\} \subset \chi(P)$ условию

$$H_m^n(x^i; x_j) \Leftrightarrow (S = \phi),$$

где $S = [\bigcap (x^i)^{-1}(1)] \cap [\bigcap x_j^{-1}(0)] \subset P$.

Доказательство. Пусть $H_m^n(x^i; x_j) = I$, т. е. $H_m^n(x^i(p); x_j(p)) = I$ для некоторого $p \in P$. Тогда $\inf\{x^i(p)\} \cdot \inf\{(x_j(p))'\} = 1$, откуда $x^i(p) = 1$ и $x_j(p) = 0$ при всех i и j , т. е. $p \in S$. Обратно, если $x^i(p) = 1$ и $x_j(p) = 0$ при всех i и j , то $H_m^n(x^i(p); x_j(p)) = I$, а значит, и $H_m^n(x^i; x_j) = I$ в $\chi(P)$.

Лемма 2. Пусть $\varphi: P \rightarrow Q$ — гомоморфизм моделей P , Q . Определим отображение $\chi = \chi_\varphi: \chi(Q) \rightarrow \chi(P)$, ставя в соответствие каждому характеру $y \in \chi(Q)$ характер $(y\varphi) \in \chi(P)$. Отображение χ есть гомоморфизм моделей $\chi(Q)$, $\chi(P)$.

Доказательство. Пусть $\chi(y_0) = x_0 \in V = U(x_0; p_1, \dots, p_k)$. Легко видеть, что для любого $y \in U(y_0; \varphi(p_1), \dots, \varphi(p_k)) \subset \chi(Q)$ получим $\chi(y) \in V$, т. е. отображение χ непрерывно. Завершает доказательство такая цепочка импликаций:

$$\begin{aligned} H_m^n(y^i; y_j) &\Rightarrow (\forall q \in Q) H_m^n(y^i(q); y_j(q)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\forall p \in P) H_m^n(y^i(\varphi(p)); y_j(\varphi(p))) \Rightarrow H_m^n(\chi(y^i); \chi(y_j)). \end{aligned}$$

Теорема 1. Сопоставим каждому элементу p модели P гомоморфизм $\xi(p): \chi(P) \rightarrow D$, полагая $\xi(p)(x) = x(p)$ для любого $x \in \chi(P)$. Этим определено отображение $\xi: P \rightarrow \chi^2(P)$. Отображение ξ является гомоморфизмом моделей P и $\chi^2(P)$, при котором $\xi(P)$ есть плотное подмножество пространства модели $\chi^2(P)$.

Доказательство. Пусть y_0 — произвольный элемент модели $\chi^2(P)$ и $W = U(y_0; x_1, \dots, x_k)$ — произвольная базисная окрестность точки y_0 в пространстве $\chi^2(P)$. Меняя, если нужно, нумерацию, будем считать, что $y_0(x_j) = 0$ при $j = 1, 2, \dots, m$ и $y_0(x_j) = 1$ при $j = m+1, m+2, \dots, k$. Обозначив $n = k - m$ и $x^i = x_{m+i}$ при $i = 1, 2, \dots, n$, рассмотрим соответствующее множество S леммы 1. Легко видеть, что $\xi^{-1}(W) = S$ и S открыто в P . Следовательно, отображение ξ непрерывно. Кроме того, предположение $S = \phi$ влечет по лемме 1 соотношение $H_m^n(x^i; x_j) = I$, откуда ввиду $y_0 \in \chi^2(P)$ получим $H_m^n(y_0(x^i); y_0(x_j)) = I$ в D , что невозможно, так как $\inf\{y_0(x^i)\} \cdot \inf\{(y_0(x_j))'\} = 1$. Значит, $S \neq \phi$, т. е. существует элемент $s \in S$, и мы получаем $\xi(s) \in W$. Этим мы показали, что $\xi(P)$ есть плотное подмножество пространства $\chi^2(P)$. Сохранение истинности значений предикатов при отображении ξ следует из таких импликаций:

$$\begin{aligned} H_m^n(p^i; p_j) &\Rightarrow (\forall x \in \chi(P)) H_m^n(x(p^i); x(p_j)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\forall x \in \chi(P)) H_m^n(\xi(p^i)(x); \xi(p_j)(x)) \Rightarrow H_m^n(\xi(p^i); \xi(p_j)). \end{aligned}$$

Теорема 2. Для любой модели P модели $\chi(P)$ и $\chi^3(P)$ изоморфны.

Доказательство. Сохраняя для гомоморфизма $\xi: P \rightarrow \chi^2(P)$, построенного в теореме 1, прежнее обозначение, обозначим через η такой же гомоморфизм $\eta: \chi(P) \rightarrow \chi^2[\chi(P)] = \chi^3(P)$, полученный исходя из модели $\chi(P)$. В силу леммы 2 существует гомоморфизм $\psi = \chi_\xi: \chi^3(P) \rightarrow \chi(P)$. Убедимся, что $\psi\eta$ есть тождественное отображение на $\chi(P)$. Действительно, пусть $x \in \chi(P)$. Покажем, что $(\psi\eta)(x)$ и x совпадают как отображения $P \rightarrow D$. Используя соотношения

$$[\psi(z)](p) = z(\xi(p)), \quad [\eta(x)](y) = y(x), \quad [\xi(p)](x) = x(p),$$

справедливые для любых $p \in P$, $x \in \chi(P)$, $y \in \chi^2(P)$, $z \in \chi^3(P)$ в силу определенных отображений ψ , η , ξ , получаем

$$[(\psi\eta)(x)](p) = [\psi(\eta(x))](p) = [\eta(x)](\xi(p)) = [\xi(p)](x) = x(p).$$

Пусть теперь $z \in \chi^3(P)$ и $z_1 = (\eta\psi)(z)$. По доказанному имеем $\psi(z_1) = \psi[(\eta\psi)(z)] = \psi(z)$. Значит, для любого элемента $p \in P$

$$z_1(\xi(p)) = [\psi(z_1)](p) = [\psi(z)](p) = z(\xi(p)),$$

откуда следует, что на плотном подмножестве $\xi(P)$ пространства $\chi^2(P)$ непрерывные отображения z и z_1 совпадают. Следовательно, $z = z_1$, т. е. $z = (\eta\psi)(z)$ при всех $z \in \chi^3(P)$, и отображение $\eta\psi$ является тождественным на $\chi^3(P)$.

Определение 2. Модель P назовем рефлексивной, если гомоморфизм ξ теоремы 1 является (топологическим) изоморфизмом модели P на модель $\chi^2(P)$.

Следствие. Для того чтобы модель была рефлексивна, необходимо и достаточно, чтобы она была изоморфна модели характеров некоторой другой модели.

Приведенная характеристика рефлексивных моделей не является внутренней, так как дается не в терминах самой исследуемой модели. Можно было бы дать внутреннюю характеристику, которая в конечном счете сводилась бы к тавтологическому пересказу определения 2 и заключалась в наложении требований согласования топологии с системой предикатов. Эти требования согласования, как показывает теорема 2, в модели характеров появляются сами собой, независимо от того, от какой модели мы отправлялись. Мы не будем приводить здесь эти условия, а ограничимся следующими замечаниями. Пусть P — произвольная модель, ξ — гомоморфизм теоремы 1. Следующие обстоятельства могут «помешать» модели P быть рефлексивной:

1) Отображение ξ не является взаимно однозначным. Этого не произойдет, если модель P обладает достаточным числом характеров, т. е. для любых различных элементов $p, q \in P$ существует характер x , для которого $x(p) \neq x(q)$.

2) Гомоморфизм ξ не есть сильный гомоморфизм моделей в смысле ⁽¹⁾. Можно показать, что если модель P дискретна и принадлежит квазимногообразию $\mathcal{M}$, полученному сужением квазимногообразия $\mathcal{M}$ путем наложения дополнительного квазитожества $H_1^1(p; q) \& H_1^1(q; p) \Rightarrow (p=q)$, то ξ — взаимно однозначный сильный гомоморфизм.

3) Отображение ξ взаимно однозначно, но не является взаимно непрерывным.

4) Образ $\xi(P)$ модели P не является замкнутым подмножеством пространства модели $\chi^2(P)$. Случаи 3) и 4) не могут иметь места, в частности, если P — бикомпактная модель.

Заметим, что любое пространство, рассматриваемое как модель примера 1, и любая булева алгебра, рассматриваемая как модель примера 2 и удовлетворяющая некоторым условиям полноты, указанным в ⁽²⁾, являются рефлексивными моделями. Таким образом, двойственность Стоуна и двойственность, описанная в ⁽²⁾, являются частными случаями приведенной двойственности. Кроме того различные типы частично упорядоченных (ч.у.) множеств, полуструктур, структур с некоторой топологией могут рассматриваться как рефлексивные модели. Это позволяет для изучения различных категорий ч.у. множеств, рассматриваемых как дискретные модели (для которых модели характеров оказываются бикомпактными), применять те же топологические методы, которые применяются с использованием двойственности Стоуна для изучения категории булевых алгебр. С другой стороны, перенесение алгебраических результатов на модели характеров позволяет получить ряд топологических результатов.

В заключение приведем два примера использования полученной двойственности. Пример Райхберга ⁽³⁾ дает возможность переходом к модели характеров от построенного им «жесткого» экстремального связного пространства, рассматриваемого как тривиальная модель, получить решение

топологического варианта проблемы автоморфизма полных булевых алгебр:

Теорема 3. Существуют бесконечные полные топологические булевы алгебры, лишенные нетождественных топологических автоморфизмов.

Будем говорить, что ч.у. множество P обладает минимальным вложением, если существует такое взаимно изотонное вложение $j: P \rightarrow A$ в булеву алгебру A , что для любого другого такого вложения $g: P \rightarrow B$ в булеву алгебру B , при котором образ $g(P)$ порождает B , существует гомоморфизм булевых алгебр $h: B \rightarrow A$, удовлетворяющий условию $hg = j$ (над P). Для подмножества Q ч.у. множества P обозначим через Q^+ и Q^* соответственно множества всех нижних и верхних граней для Q .

Теорема 4. Ч.у. множество P тогда и только тогда обладает минимальным вложением, когда для любых элементов $r, s \in P$, $r \leq s$, и любого элемента $p \in P$ выполняется хотя бы одно из соотношений $s \notin \{r, p\}^{+}$ или $r \notin \{s, p\}^{*+}$. В случае, если P есть структура, это условие равносильно дистрибутивности структуры P .*

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
10 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. И. Мальцев, Алгебраические системы, «Наука», 1970. ² В. В. Пашенков, О теореме Стоуна, ДАН, т. 194, № 4, 778 (1970). ³ А. И. Райхберг, Экстремально несвязные пространства с единственным на себя, ДАН, т. 195, № 3, 562 (1970).