Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 1

УДК 513.015 *МАТЕМАТИКА*

Р. М. ГЕЙДЕЛЬМАН, Л. З. КРУГЛЯКОВ

О ПЛОСКОСТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 26 IV 1974)

Всякое a-параметрическое семейство $(L_d)_a$ d-мерных плоскостей L_d в N-мерном проективном пространстве P_N при $a+d<N$ можно рассматривать, по крайней мере локально, как точечную $(d+a)$-мерную поверхность V_{d+a}, которую назовем плоскостной поверхностью (подобно тому, как семейство прямых $(L_1)_1$ можно рассматривать как линейчатую поверхность). В данной заметке дается проективная классификация плоскостных поверхностей, основанная на числе σ торсов, проходящих через текущую образующую L_d, и излагаются основы их проективной теории. При $\sigma=a$ поверхности V_{d+a} являются тангенциально вырожденными; они были предметом ряда исследований [1-5].

1^0. Однопараметрическое подсемейство Ψ_1 плоскостей L_d назовем торсом, если в каждой плоскости L_d оно имеет характеристикой плоскость размерности $d-1$. Пусть $T(X)$ — касательная плоскость поверхности V_{d+a} в точке $X\subset L_d$. Обозначим через $T(L_d)_a$ линейную оболочку плоскостей $T(X)$ во всех неособых точках X плоскости L_d, т. е. подпространство минимальной размерности n, содержащее все $T(X)$, которое совпадает с касательным подпространством для образующей L_d семейства $(L_d)_a$ [6]. Число $\rho=n-d-a$ назовем индексом плоскостной поверхности V_{d+a}. Плоскость $L_{d+\sigma}$, являющуюся пересечением плоскостей $T(X)$ во всех неособых точках $X\subset L_d$, назовем ассоциированной плоскостью для L_d. Очевидно, что $L_{d+\sigma}\supset L_d$ и $0\leqslant\sigma\leqslant a$. Если $\sigma\geqslant1$, то поверхность V_{d+a} назовем плоскостной поверхностью типа σ и обозначим ${}_\sigma V_{d+a}$.

Теорема 1. *Индекс ρ плоскостной поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ удовлетворяет условию $\rho\leqslant d(a-\sigma)$.*

Пусть через плоскость L_d поверхности V_{d+a} проходит σ торсов Ψ_1^τ, $\tau=1,\ldots,\sigma\leqslant a$. (В дальнейшем предполагается, что направления всех торсов Ψ_1^τ линейно независимы.) Пусть L_{d-1}^τ — характеристика, а ${}^\tau L_{d+1}$ — касательное подпространство для плоскости L_d торса Ψ_1^τ, причем $\dim{}^\tau L_{d+1}=$ $=d+1$. Связь между типом поверхности V_{d+a} и числом торсов Ψ_1^τ устанавливает следующая

Теорема 2. *В общем случае плоскостная поверхность ${}_\sigma V_{d+a}$ типа σ характеризуется тем, что через каждую ее плоскость L_d проходит σ торсов Ψ_1^τ, $\tau=1,\ldots,\sigma$. При этом для каждой плоскости L_d ее ассоциированная плоскость $L_{d+\sigma}$ есть линейная оболочка касательных подпространств ${}^\tau L_{d+1}$ всех торсов Ψ_1^τ.*

Пусть $T(L_{d-1}^\tau)_a$ — касательное подпространство семейства $(L_{d-1}^\tau)_a$.

Теорема 3. *Для поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ типа $\sigma\geqslant2$ касательное подпространство $T(L_{d-1}^\tau)_a$ имеет размерность $\min\{n,\ d-1+\sigma+d(a-\sigma)\}$ и содержит все касательные подпространства ${}^{\tau_1}L_{d+1}$ для плоскости L_d всех торсов $\Psi_1^{\tau_1}$, кроме подпространства ${}^\tau L_{d+1}$, $\tau_1\neq\tau$.*

Обозначим характеристику касательного подпространства ${}^\tau L_{d+1}$ семейства $({}^\tau L_{d+1})_a$ через $\mathrm{ch}\,({}^\tau L_{d+1})_a$.

Теорема 4. *Если для поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ типа $\sigma\geqslant2$ имеется характеристика $\mathrm{Ch}\,({}^\tau L_{d+1})_a$, то она содержится во всех характеристиках $L_{d-1}^{\tau_1}$ плоскости L_d всех торсов $\Psi_1^{\tau_1}$, кроме характеристики L_{d-1}^τ, $\tau_1\neq\tau$.*

Торсы Ψ_1^τ, τ, $\tau_i = 1, \ldots, \sigma$, поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ определяют ткань (при $\sigma = a$ — сеть), которую назовем **фокальной**. Систему характеристик L^τ_{d-1} торсов поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ назовем **независимой**, если в каждой образующей L_d ковекторы характеристик линейно независимы. Очевидно, для этого необходимо $\sigma \leqslant d+1$. Если же ковекторы характеристик L^τ_{d-1} в L_d будут линейно зависимы, то систему характеристик L^τ_{d-1} назовем **зависимой**. Это всегда будет, если $\sigma > d+1$. Поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ будем называть поверхностями **малого типа**, если $\sigma \leqslant d+1$, и поверхностями **большого типа**, если $\sigma > d+1$.

2°. Плоскостные поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ малого типа с независимой системой характеристик обладают следующими свойствами.

Теорема 5. *Плоскостные поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ расслаиваются на $\infty^{a-\sigma}$ тангенциально вырожденных поверхностей ${}_\sigma V_{d+\sigma}$ с независимой системой характеристик.*

Следствие. ***Касательное подпространство $T(L^{\tau_1}_{d-1})_\sigma$ для каждой из*** *поверхностей ${}_\sigma V_{d+\sigma}$, на которые расслаивается ${}_\sigma V_{d+a}$ типа $\sigma \geqslant 2$, совпадает с линейной оболочкой всех касательных подпространств ${}^{\tau_1}L_{d+1}$, $\tau_1 \neq \tau$.*

Теорема 6. *Семейство характеристик $(L^{\tau_1}_{d-1})_a$, $\tau_1 = 1, \ldots, \sigma$, τ_1 фиксировано, плоскостной поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ является плоскостной поверхностью ${}_\sigma V^{\tau_1}_{d-1+a}$ того же типа и с той же фокальной тканью. Если $\sigma \leqslant d$, то в общем случае система ее характеристик $L^{\tau_1\tau_2}_{d-2}$ будет независимой.*

Эти плоскостные поверхности ${}_\sigma V^{\tau_1}_{d+a-1}$ будем называть **первыми фокальными** поверхностями поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$. По теореме 6 каждая поверхность ${}_\sigma V^{\tau_1}_{d-1+a}$ имеет фокальные поверхности ${}_\sigma V^{\tau_1\tau_2}_{d-2+a}$, которые назовем **вторыми фокальными** поверхностями исходной плоскостной поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ и т. д. Характеристики $L^{\tau_1\tau_2}_{d-2}$ и $L^{\tau_2\tau_1}_{d-2}$ совпадают и поэтому данная поверхность ${}_\sigma V_{d+a}$ имеет σ первых фокальных поверхностей, $C^2_{\sigma+1}$ вторых фокальных поверхностей, $C^3_{\sigma+2}$ третьих фокальных поверхностей ${}_\sigma V^{\tau_1\tau_2\tau_3}_{d-3+a}$ и т. д.; наконец, $C_{\sigma+d-1}$ d-х фокальных поверхностей ${}_\sigma V^{\tau_1\ldots\tau_d}_{0+a}$. Эти a-мерные поверхности ${}_\sigma V^{\tau_1\ldots\tau_a}_{0+a}$ расслаиваются на $\infty^{a-\sigma}$ σ-сопряженных систем ([7]), образованных сопряженными линиями Ψ_1^τ фокальной ткани. Все эти поверхности ${}_\sigma V^{\tau_1\ldots\tau_d}_{0+\sigma}$ являются фокальными преобразованиями ([8]) друг от друга. Образующая плоскость L_d данной поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ имеет соприкосновение порядка d с линиями Ψ_1^τ ткани d-й фокальной поверхности ${}_\sigma V^{\tau\ldots\tau}_{0+a}$ (τ берется d раз); соприкосновение порядка p с линиями $\Psi_1^{\tau_1}$, порядка q с линиями $\Psi_1^{\tau_2}$ и касается линий $\Psi_1^{\tau_3}$ на d-й фокальной поверхности ${}_\sigma V^{\tau_1\ldots\tau_1\tau_2\ldots\tau_2\tau_3}_{0+a}$ (τ_1 (τ_2) берется p (q) раз и $p+q+1=d$).

Таким образом, плоскостная поверхность ${}_\sigma V_{d+a}$ образована соприкасающимися порядка d плоскостями к семействам сопряженных линий Ψ_1^τ на σ поверхностях V_a^τ, расслаивающихся на $\infty^{a-\sigma}$ σ-сопряженных систем.

Заметим, что каждая из поверхностей ${}_\sigma V^{\tau_1\ldots\tau_i}_{d-i+a}$, $i, j = 1, \ldots, d$, имеет индекс $\rho_i \leqslant (d-i)(a-\sigma)$, а теорема 4 справедлива относительно каждого из касательных подпространств $T(L^{\tau_1\ldots\tau_i}_{d-i})_a$ поверхности ${}_\sigma V^{\tau_1\ldots\tau_{i-1}}_{d-i+1+a}$ для плоскости $L_{d-i+1}^{\tau_1\ldots\tau_{i-1}}$, содержащей σ характеристик $L_{d-i}^{\tau_1\ldots\tau_i}$; именно $T(L_{d-i}^{\tau_1\ldots\tau_i})_a$ содержит все ${}^{\tau_j}L_{d-i+2}^{\tau_1\ldots\tau_{i-1}}$, $\tau_j=1,\ldots,\sigma$; $\tau_j\neq\tau_i$, кроме ${}^{\tau_i}L_{d-i+2}^{\tau_1\ldots\tau_{i-1}}$.

Теорема 7. *Если $N>d+1+a$, то семейство касательных подпространств $({}^{\tau_1}L_{d+1})_a$ плоскостной поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ в общем случае является плоскостной поверхностью ${}_\sigma^{\tau_1}V_{d+1-a}$ того же типа с независимой системой характеристик и с той же фокальной тканью.*

Эти σ плоскостных поверхностей ${}_\sigma^{\tau_1}V_{d+1+a}$ назовем **первыми касательными поверхностями** для ${}_\sigma V_{d+a}$. Если $N>d+2+a$, то касательные подпространства ${}^{\tau_2\tau_1}L_{d+2}$ поверхностей ${}_\sigma^{\tau_1}V_{d+1+a}$ образуют поверхности ${}_\sigma^{\tau_2\tau_1}V_{d+2+a}$, которые назовем **вторыми касательными поверхностями** для ${}_\sigma V_{d+a}$. Так как ${}^{\tau_1\tau_2}L_{d+2}$ и ${}^{\tau_1\tau_2}L_{d+2}$ совпадают (они являются линейной оболочкой ${}^{\tau_1}L_{d+1}$ и ${}^{\tau_2}L_{d+1}$ при $\tau_1\neq\tau_2$), то вторых касательных поверхностей будет $C_{\sigma+1}$. Таким же образом вводятся **третьи касательные поверхности** ${}^{\tau_3\tau_2\tau_1}{}_\sigma V_{d+3+a}$, если $N>d+3+a$, которых будет $C^3{}_{\sigma+2}$ и т. д., наконец, $C_{\sigma+N-2-d-a}^{N-1-d-a}$ $(N-1-d-a)$-ых касательных гиперповерхностей в P_N. Касательные подпространства плоскостей ${}^{\tau_\beta\ldots\tau_1}L_{N-a-1}$, $\beta=N-2a-d-1$, образуют конгруэнцию плоскостей ${}_\sigma(L_{N-a})_a$, расслаивающуюся на $\infty^{a-\sigma}$ вполне фокальных (9) σ-параметрических семейств плоскостей ${}_\sigma(L_{N-a})_\sigma$ с теми же торсами Ψ_1^τ. Касательные подпространства ${}^\tau L_{N-a+1}$ торсов Ψ_1^τ (τ фиксировано) конгруэнции ${}_\sigma(L_{N-a})_a$ образуют a-параметрическое семейство, обладающее σ системами торсов $\Psi_1^{\tau_1}$, которое назовем **плоскостной системой** ${}_\sigma^{\tau_1}(L_{N-a+1})_a$. Эта система ${}_\sigma^{\tau_1}(L_{N-a+1})_a$ порождает плоскостные системы ${}^{\tau_2\tau_1}{}_\sigma(L_{N-a+2})_a,\ldots,{}^{\tau_{a-1}\ldots\tau_1}{}_\sigma(L_{N-1})_a$ с той же фокальной тканью, расслаивающиеся на $\infty^{a-\sigma}$ плоскостных систем ${}_\sigma^{\tau_1}(L_{N-a+1})_\sigma$, ${}^{\tau_2\tau_1}{}_\sigma(L_{N-a-2})_\sigma,\ldots$ $\ldots,{}^{\tau_{c-1}\ldots\tau_1}{}_\sigma(L_{N-1})_\sigma$ соответственно и представляющие вполне фокальные семейства плоскостей с той же системой торсов Ψ_1^τ.

Заметим, что теорема 6 распространяется на касательные поверхности и плоскостные системы, причем индекс ρ^m, $m=1,\ldots,\beta$, m-й касательной поверхности не более $(d+m)(a-\sigma)$.

3⁰. Для плоскостных поверхностей ${}_\sigma V_{d+a}$ малого типа с зависимой системой характеристик имеет место

Теорема 8. *Пусть характеристики $L_{d-1}^{\nu_1}$, $\nu_1=1,\ldots,\sigma_1$, образуют в L_d независимую систему, а ковекторы остальных характеристик L_{d-1}^{ν}, $\nu=\sigma_1+1,\ldots,\sigma$, линейно выражаются через все ковекторы характеристик L_{d-1}^{ν}.*

Тогда поверхность ${}_\sigma V_{d+a}$ расслаивается на $\infty^{a-\sigma}$ $(d+\sigma)$-мерных конусов ${}_\sigma V_{d+\sigma}^{\nu-\sigma_1}$ с $(d-\sigma_1)$-мерными вершинами $L_{d-\sigma_1}^{12\ldots\sigma_1}$, , являющимися пересечением всех $L_{d-1}^{\nu_1}\subset L_d$. Если при этом любые тройки ковекторов характеристик независимы, то фокальная сеть ${}_\sigma V_{d+\sigma}^{d-\sigma_1}$ будет голономной (3) и будут иметь место теоремы 6 и 7.

Заметим, что теоремы 3 и 4 распространяются на поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ с зависимой системой характеристик, если в условии вместо значений $\tau=1,\ldots,\sigma$ брать значения $\nu_1=1,\ldots,\sigma_1$.

4⁰. Геометрия плоскостных поверхностей большого типа ($\sigma>d+1$) аналогична рассмотренной, но имеет и некоторые особенности.

Теорема 9. *Если в образующей плоскости L_d имеется $d+1$ линейно независимых характеристик и, кроме того, любые три из σ характеристик линейно независимы, то поверхность ${}_\sigma V_{d+a}$ расслаивается на ∞^{a-d-1} тангенциально вырожденных поверхностей ${}_{d+1}V_{d+d+1}$ с независимой системой характеристик.*

Для поверхностей ${}_\sigma V_{d+a}$ большого типа, удовлетворяющих условию теоремы 9, справедливы заключения теорем 6, 7 и они имеют то же строение, что и поверхности ${}_\sigma V_{d+a}$ малого типа с независимой системой характеристик.

Если базис характеристик плоскости L_d состоит из $\sigma_1 < d+1$ ковекторов, то строение поверхностей ${}_\sigma V_{d+a}$ определяется по аналогии с теоремой 8 — они расслаиваются на конические поверхности.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики при Томском государственном университете

Поступило 18 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. Cartan*, Boul. Soc. math. France, v. 47, 125 (1919). [2] *Н. Н. Яненко*, УМН, т. 8, в. 1 (53), 21 (1953). [3] *М. А. Акивис*, Изв. высш. учебн. завед. Матем., № 1, 9 (1957). [4] *С. И. Савельев*, ДАН, т. 115, № 4, 663 (1957). [5] *В. В. Рыжков*, ДАН, т. 135, № 1 20 (1960). [6] *С. Е. Карапетян*, Изв. АН АрмССР, т. 16, № 3, 3 (1963). [7] *Р. В. Смирнов*, ДАН, т. 71, № 3, 437 (1950). [8] *Р. М. Гейдельман*, Тез. докл. V Всесоюзн. конфер. по соврем. проблемам геометрии, Самарканд, 1972, стр. 43. [9] *Р. М. Гейдельман*, Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1965, М., 1967, стр. 323.