Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 2

УДК 517.946 **МАТЕМАТИКА**

В. Г. РОМАНОВ

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ РИМАНОВОЙ МЕТРИКИ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ЧЕРЕЗ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ ГРАНИЦЫ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 7 III 1974)

В двумерном пространстве x_1, x_2 рассматривается область D с границей S и изотропная риманова метрика, в которой элемент длины $d\tau$ подсчитывается по формуле

$$d\tau=n(x)\,|dx|,\quad dx=(dx_1^2+dx_2^2)^{1/2}. \tag{1}$$

Изучается следующая задача: найти функцию $n(x)$, $x=(x_1, x_2)$, в области D, если известны расстояния $\tau(x^1, x^2)$ в метрике (1) между любыми парами точек x^1, $x^2\in S$.

Сформулированная задача находит большое применение в геофизике в связи с изучением распределения внутри земного шара скоростей распространения упругих волн и носит название обратной кинематической задачи сейсмики. Исследованию ее посвящен ряд работ. В частности, в работах ([1], [2]) рассматривался одномерный вариант задачи, когда $n(x)$ зависит только от расстояния до фиксированной точки x^0, а область D — круг с центром в x^0; в работах ([3–5]) — линеаризированная постановка двумерной (а также многомерной) задачи; в работах ([6], [7]) сформулированная задача изучалась в предположении аналитичности $n(x)$ в D.

Проведенные исследования показывают, что для одной и той же заранее заданной области D с гладкой границей S существуют функции $n(x)$, которые определяются однозначно расстояниями $\tau(x^1, x^2)$, x^1, $x^2\in S$, и существуют функции $n(x)$, которые расстояниями между точками границы определяются неоднозначно. Примеры неоднозначности легко строятся в классе функций $n(x)$, зависящих только от расстояния до любой фиксированной внутренней точки области D. Таким образом, возникает вопрос об описании множества функций $n(x)$ однозначности решения поставленной задачи, или, что то же самое, множества неоднозначности. Другой возможный аспект постановки этой проблемы заключается в выделении таких классов функций $\tau(x^1, x^2)$, x^1, $x^2\in S$, для которых метрика (1) определяется однозначно.

Следующий результат представляет собой определенный шаг в описании множества однозначности решения задачи определения метрики (1).

Теорема. *Пусть D — выпуклая область с границей S класса $C^4(S)$, кривизна которой ограничена снизу некоторой положительной постоянной и $n(x)$ — функция класса $C^4(D)$.*

Тогда существует такое $N_0=N_0(S)>0$, что для любой положительной постоянной $n_0\leqslant N_0$ найдется число $\varepsilon_0=\varepsilon_0(n_0, S)>0$ такое, что любая функция $n(x)$, удовлетворяющая неравенству

$$\|n(x)-n_0\|_{C^4(D)}\leqslant\varepsilon_0, \tag{2}$$

однозначно определяется расстояниями $\tau(x^1, x^2)$, x^1, $x^2\in S$.

Доказательство теоремы опирается на развитый в ([8]) метод сведения исследования задачи на единственность решения к изучению некоторой однородной задачи интегральной геометрии. Для исследования последней используется схема, изложенная в работе ([9]).

Отметим основные утверждения, на которых базируется доказательство и которые могут представлять самостоятельный интерес.

Пусть x^0 — произвольная точка области D, ν^0 — произвольный единичный вектор. Рассмотрим каноническую систему уравнений Эйлера для геодезических метрики (1):

$$\frac{dx}{dt}=\frac{p}{n^2(x)}, \quad \frac{dp}{dt}=\nabla \ln n(x), \tag{3}$$

в которой параметр t с точностью до аддитивной постоянной совпадает с длиной дуги (в метрике (1)) геодезической, и задачу Коши для системы (3) с данными

$$x|_{t=0}=x^0, \quad p|_{t=0}=n(x^0)\nu^0. \tag{4}$$

Лемма 1. *Для любого положительного* n_0 *существует* $\varepsilon_0=\varepsilon_0(n_0, S)>0$ *такое, что для любой функции* $n(x)$, *удовлетворяющей неравенству* (2), *решение задачи* (3), (4) *существует, единственно и продолжимо в обе стороны от точки* x^0 *без самопересечений до границы области* D, *причем функция* $x(t)$ *представима для* $x(t)\in D$ *в виде*

$$x(t)=x^0+\frac{\nu^0}{n(x^0)}t+\varepsilon t^2\Phi(t, x^0, \nu^0), \tag{5}$$

где $\varepsilon=\|n(x)-n_0\|$, *а функция* $\Phi(t, x^0, \nu^0)$ *непрерывна и ограничена вместе с частными производными до третьего порядка включительно константой, зависящей только от* n_0 *и* S.

Лемма 2. *Число* ε_0 *в лемме 1 может быть выбрано так, что при выполнении неравенства* (2) *существует единственное решение системы* (3), *проходящее через любую заданную пару точек* x^0, $x\in\bar{D}$.

Таким образом, леммы 1, 2 устанавливают соответственно существование геодезических, проходящих через любую точку x^0 области D в любом направлении ν^0, и существование единственной кратчайшей, соединяющей любую пару точек области D и ее границы. В силу леммы 2 для фиксированной точки x^0 между координатами точки $x\in\bar{D}$ и параметрами t, ν^0, $t\geqslant 0$, существует взаимно однозначное соответствие.

Лемма 3. *Для достаточно малых* $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ (ε_0 *из леммы* 2) *параметры* t, ν^0, *рассматриваемые как функции пары точек* x^0, $x\in\bar{D}$, *представимы в виде*

$$\begin{gathered} t=n(x^0)|x-x^0|+\varepsilon|x-x^0|^2F_1\left(x^0, \frac{x-x^0}{|x-x^0|}, |x-x^0|\right), \\ \nu^0=\frac{x-x^0}{|x-x^0|}+\varepsilon|x-x^0|F_2\left(x^0, \frac{x-x^0}{|x-x^0|}, |x-x^0|\right), \end{gathered} \tag{6}$$

где F_1, F_2 — *трижды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.*

Лемма 4. *Две функции* $n(x)$, $\hat{n}(x)\in C^4(D)$, *удовлетворяющие неравенству* (2) *с* ε_0 *из леммы 2, для которых расстояния* $\tau(x^1, x^2)$ *и* $\hat{\tau}(x^1, x^2)$ *для точек* x^1, $x^2\in S$ *тождественно равны, совпадают между собой на* S *вместе со всеми производными до четвертого порядка.*

Используя факт, отмеченный в лемме 4, можно при рассмотрении вопросов единственности задачи определения метрики, два различных решения $n(x)$, $\hat{n}(x)$ с одинаковыми данными продолжать за пределы области D с сохранением дифференциального класса, полагая $n(x)=\hat{n}(x)$ вне $\bar{D}$. Это обстоятельство существенно используется при доказательстве сформулированной теоремы. В предположении, что существуют два решения $n(x)$, $\hat{n}(x)$ задачи, с использованием методики ([8]) для вектор-функции

$U(x)$, компоненты которой представляют собой разности

$$n(x)-\hat{n}(x)=\tilde{n}(x), \quad \nabla[\ln \hat{n}(x)-\ln \hat{n}(x)]=\tilde{s}(x),$$

получено матричное равенство

$$\int\limits_{\Gamma(x^0,\nu^0)} U(x)Z(t,x^0,\nu^0)\,dt=0, \tag{7}$$

в котором $\Gamma(x^0, \nu^0)$ — геодезическая метрики $n(x)$, проходящая через произвольную точку $x^0 \in \bar{D}$ в направлении ν^0 (ν^0 — произвольный единичный вектор), а $Z(t, x^0, \nu^0)$ — дважды непрерывно дифференцируемая квадратная матрица переменных t, x^0, ν^0. За счет продолжения функций n, $\hat{n}$ в область $D_1 \supset D$ с сохранением дифференциального класса так, что $n=n$ вне D, равенство (7) выполняется для произвольных $x^0 \in D_1$.

Задача отыскания функции $U(x)$ из равенства (7) при заданных кривых $\Gamma(x^0, \nu^0)$ и матричной весовой функции $Z(t, x^0, \nu^0)$ представляет собой однородную задачу интегральной геометрии. Использование для ее исследования методики работы ([9]) в сочетании с представлениями (5), (6) позволяет установить единственность ее решения при достаточно малых n_0 и ε. Отсюда и вытекает приведенная выше формулировка теоремы единственности.

Теорема имеет аналоги также в пространствах более высокой размерности.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
28 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Herglotz*, Zs. Math. u. Phys., B. 52, № 3, 275 (1905). [2] *М. Л. Гервер, В. М. Маркушевич*, ДАН, т. 175, № 2, 334 (1967). [3] *М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов*, ДАН, т. 171, № 6, 1279 (1966). [4] *В. Г. Романов*, Сиб. матем. журн., т. 8, № 5, 1206 (1967). [5] *В. Г. Романов*, Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, Новосибирск, 1972. [6] *Ю. Е. Аниконов*, В сборн. Математические проблемы геофизики, в. 1, Новосибирск, 1969, стр. 26. [7] *Ю. Е. Аниконов*, Там же, в. 3, Новосибирск, 1972, стр. 86. [8] *В. Г. Романов*, Там же, в. 4, 1973, Новосибирск, стр. 147. [9] *М. М. Лаврентьев, А. Л. Бухгейм*, ДАН, т. 211, № 1 (1973).