

Э. М. СААК

**ЗАДАЧА О СКАЧКЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ n ПЕРЕМЕННЫХ**

(Представлено академиком И. Н. Векун 7 III 1974)

Эвристическая постановка названной в заголовке задачи такова: найти гармоническую в $(R^n \setminus \Gamma)$, где Γ — замкнутая гладкая жорданова $(n-1)$ -мерная поверхность, функцию $u(x)$, $x \in (R^n \setminus \Gamma)$, претерпевающую на Γ вместе со своей нормальной к Γ производной скачки, равные соответственно заданным функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $x \in \Gamma$.

При $n=2$ задача о скачке для гармонических функций сводится к задаче о скачке для аналитических функций комплексного переменного. Последняя является весьма частным случаем задачи Римана, хорошо изученной как для аналитических, так и для обобщенных аналитических функций ⁽¹⁾. В монографии ⁽¹⁾ указаны также многочисленные и важные приложения задачи Римана, которые, в частности, обосновывают прикладную ценность сформулированной выше задачи о скачке. Вместе с тем при переходе к высшим размерностям ($n > 2$) появляются дополнительные трудности, делающие задачу о скачке при $n > 2$ ценной также и в теоретическом отношении.

Для точной постановки задачи о скачке для гармонической функции необходимо ввести ряд обозначений и определений. Пусть Ω_+ есть внутренность, а Ω_- — внешность поверхности Γ . Через $W_p^{(r)}(\Omega)$ будем обозначать пространство С. Л. Соболева для области Ω , $1 < p < \infty$, $r=1, 2, \dots$. Через $W_p^{(r)}(R^n \setminus \Gamma)$ обозначаем пространство функций $u(x)$, $v(x)$, $x \in (R^n \setminus \Gamma)$, сужение которых на Ω_+ (Ω_-) принадлежит пространству $W_p^{(r)}(\Omega_+)$ соответственно $W_p^{(r)}(\Omega_-)$. Норма в пространстве $W_p^{(r)}(R^n \setminus \Gamma)$ вводится по формуле

$$\|u\|_{W_p^{(r)}(R^n \setminus \Gamma)} = \{\|u\|_{W_p^{(r)}(\Omega_+)}^p + \|u\|_{W_p^{(r)}(\Omega_-)}^p\}^{1/p}.$$

В частности, $W_2^{(1)}(R^n \setminus \Gamma)$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega_+} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega_-} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (1)$$

где ∇ означает градиент. При этом на гармонические функции $u(x)$ из $W_p^{(r)}(R^n \setminus \Gamma)$ накладывается требование

$$u_\infty = u(x^0) = 0,$$

где x^0 — некоторая фиксированная точка области Ω_+ .

Через $W_{\tau, q}(R^n \setminus \Gamma)$ обозначается пополнение множества $W_p^{(r)}(R^n \setminus \Gamma)$, $1/p + 1/q = 1$, по норме

$$\|u\|_{-\tau, q} = \sup_{\|v\|_{\tau, p} < 1} \langle u, v \rangle,$$

где $\|v\|_{\tau, p} = \|v\|_{W_p^{(r)}(R^n \setminus \Gamma)}$. Это пространство двойственно к $W_p^{(r)}(R^n \setminus \Gamma)$ относительно скалярного произведения (1).

Через $W_p^{(\Delta)}(R^n \setminus \Gamma)$ обозначаем подпространство пространства $W_p^{(\Delta)}(R^n \setminus \Gamma)$, состоящее из гармонических в областях Ω_+ и Ω_- функций.

Особо важную роль будут играть подпространство $H = W_2^{(\Delta)}(R^n \setminus \Gamma) \cap W_2^{(1)}(R^n)$ и его ортогональное дополнение G в пространстве $W_2^{(\Delta)}(R^n \setminus \Gamma)$. Пространство H состоит из функций, гармонических вне Γ и принимающих на Γ одинаковые изнутри и извне предельные значения. Подпространство G состоит из гармонических вне Γ функций, нормальная производная которых на Γ не претерпевает скачка. Более точно это означает следующее. Для любого $u \in G$ и любого $v \in W_2^{(1)}(R^n)$ имеет место равенство

$$\int_{\Gamma} v v \cdot (\nabla u_+ - \nabla u_-) d\sigma = 0,$$

где v — единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ , $d\sigma$ — элемент поверхности Γ , ∇u_+ (∇u_-) — предельные значения вектора ∇u изнутри (извне) поверхности Γ . Чтобы убедиться в этом, достаточно в (1) проинтегрировать по частям и учесть, что по определению G ортогонально H , а вследствие этого G является также ортогональным и к $W_2^{(1)}(R^n)$, так как последнее распадается в прямую сумму подпространства H и подпространства, получающегося замыканием в $W_2^{(1)}(R^n)$ множества функций, равных нулю в окрестности Γ .

Пусть $\bar{\varphi}$ — линейный непрерывный функционал над пространством G . Функцию $u_{\bar{\varphi}} \in G$ определим соотношением

$$\langle u_{\bar{\varphi}}, v \rangle = \bar{\varphi}(v) \quad \forall v \in G. \quad (2)$$

Пусть $\bar{\psi}$ — линейный непрерывный функционал над пространством H . Функцию $u^{\bar{\psi}} \in H$ определим соотношением

$$\langle u^{\bar{\psi}}, v \rangle = \bar{\psi}(v) \quad \forall v \in H. \quad (3)$$

Функцию $u = u_{\bar{\varphi}} + u^{\bar{\psi}}$ назовем обобщенным решением задачи о скачке для гармонической функции вне поверхности Γ при граничном условии $\varphi(x)$, $\psi(x)$

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in (R^n \setminus \Gamma); \quad (4)$$

$$u_+(x) - u_-(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma; \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_+(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u_-(x)}{\partial \nu} = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (6)$$

где знак $+$ ($-$) указывает на то, что предельные значения берутся изнутри (извне) поверхности Γ , а функционалы $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ определяются граничным условием по формулам

$$\bar{\varphi}(v) = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} \varphi d\sigma, \quad v \in G, \quad (7)$$

$$\bar{\psi}(v) = \int_{\Gamma} v \psi d\sigma, \quad v \in H. \quad (8)$$

Естественность этого определения легко увидеть, если в (2), (3) проинтегрировать по частям и учесть (7), (8). Это приведет к соотношениям

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} (u_+ - u_-) d\sigma = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} \varphi d\sigma \quad \forall v \in G,$$

$$\int_{\Gamma} v \left(\frac{\partial u_+}{\partial \nu} - \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \right) d\sigma = \int_{\Gamma} v \psi d\sigma \quad \forall v \in H.$$

Функции φ, ψ должны быть таковы, чтобы (7), (8) давали требуемые функционалы над G и H .

Существование и единственность обобщенного решения задачи о скачке в классе $W_2^{\Delta(1)}(R^n \setminus \Gamma)$ прямо следует из теоремы Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве. Остается выяснить, при каких условиях на φ, ψ и Γ это обобщенное решение становится классическим, т. е. принадлежащим классам $C^1(\bar{\Omega}_+)$ и $C^1(\bar{\Omega}_-)$, где черта означает замыкание.

Будем говорить, что задача о скачке разрешима в классе $W_p^{(r)}(R^n \setminus \Gamma)$, если из ограниченности функционалов $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ в пространстве $W_q^{(-r)}(R^n \setminus \Gamma)$, $1/p + 1/q = 1$, следует, что $u_\varphi^\psi \in W_p^{(r)}(R^n \setminus \Gamma)$, $2 \leq p < \infty$, $r = 1, 2, \dots$, причем справедлива оценка

$$\|u_\varphi^\psi\|_{r,p} \leq M_{r,p} (\|\tilde{\varphi}\|_{r,p} + \|\tilde{\psi}\|_{r,p}),$$

где $M_{r,p}$ не зависит от $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$, а $\|\tilde{\varphi}\|_{r,p}, \|\tilde{\psi}\|_{r,p}$ есть нормы функционалов $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ в пространстве $W_q^{(-r)}(R^n \setminus \Gamma)$.

Методом, предложенным в работах автора (2, 3), может быть доказана следующая

Теорема. Если поверхность Γ принадлежит классу C^2 , то задача о скачке разрешима в классе $W_p^{(r)}(R^n \setminus \Gamma)$ для любого p , $2 \leq p < \infty$.

Следствие. Если $\Gamma \in C^2$ и удовлетворяет условиям теоремы вложения С. Л. Соболева, то при достаточно гладком граничном условии φ, ψ задача о скачке имеет классическое решение.

В заключение укажем аналитический способ решения задачи о скачке в случае, когда поверхность Γ есть сфера $|x| = 1$ и $n = 3$.

Если P_1 и P_2 означают соответственно потенциалы простого и двойного слоя на сфере Γ , то решение задачи (4), (5), (6) дается формулой

$$u_\varphi^\psi = P_1(\varphi + \psi) + P_2\varphi.$$

Для проверки этой формулы можно воспользоваться сферическими функциями $\{Y_n^{(m)}\}$, $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$; $n = 0, 1, 2, \dots$, и следующими легко проверяемыми соотношениями:

$$P_1(Y_n^{(m)}) = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} |x|^n Y_n^{(m)} \left(\frac{x}{|x|} \right), & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2n+1} |x|^{-n-1} Y_n^{(m)} \left(\frac{x}{|x|} \right), & |x| > 1. \end{cases}$$

$$P_2(Y_n^{(m)}) = \begin{cases} \frac{n}{2n+1} |x|^n Y_n^{(m)} \left(\frac{x}{|x|} \right), & |x| < 1, \\ -\frac{n+1}{2n+1} |x|^{-n-1} Y_n^{(m)} \left(\frac{x}{|x|} \right), & |x| > 1. \end{cases}$$

Отметим в заключение, что рассмотренная выше задача близка к одной вариационной задаче Гильберта, исследованной ранее С. М. Никольским (4). В работе (4) установлены существование и единственность обобщенного решения задачи Гильберта, однако вопрос о существовании классического решения не затрагивался.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступило
20 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. ² Э. М. Сааж, ДАН, т. 211, № 1, 51 (1973). ³ Э. М. Сааж, ДАН, т. 211, № 5, 1074 (1973). ⁴ С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 22, № 5, 599 (1958).