Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 6

УДК 535.353

ФИЗИКА

С. К. ЖДАНОВ, А. С. ЧИХАЧЕВ

ЧАСТИЦА В ПОЛЕ РАЗБЕГАЮЩИХСЯ δ-ПОТЕНЦИАЛОВ

(Представлено академиком Б. Б. Кадомцевым 7 II 1974)

1. В ряде случаев при описании конкретной физической ситуации необходимо изучение поведения одной частицы на фоне заданного движения остальных частей системы. Это приводит к решению уравнения Шредингера с потенциалом взаимодействия, явно зависящим от времени, точное решение которого возможно лишь для частных форм потенциала.

Один из таких случаев — поведение частицы в поле притяжения двух δ-потенциалов, разлетающихся с постоянной скоростью, рассматривается в данной работе.

Стационарные δ-потенциалы рассматривались ранее в ряде работ, например ([1], [2]). Было показано, что уравнение Шредингера

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha\delta(x)\right]\Psi_{\rm I}(x,t)=0, \qquad (1)$$

где x, t — координата и время, $\Psi_{\rm I}$ — волновая функция частицы, α — константа, характеризующая потенциал, имеет единственное решение, отвечающее связанному состоянию с энергией $E=-\alpha^2/2$, волновая функция которого

$$\Psi_{\rm I}(x,t)=\alpha^{1/2}\exp\left(-\alpha|x|+\frac{\alpha^2}{2}t\right). \qquad (2)$$

Если δ-центр движется с постоянной скоростью v, то (2) переходит в

$$\Psi_{\rm I}^{(\mp)}(x,t)=\alpha^{1/2}\exp\left(\pm iv(x\mp vt)-\alpha|x\mp vt|+it\frac{\alpha^2+v^2}{2}\right). \qquad (3)$$

При этом $\Psi_{\rm I}^{(-)}$ ($\Psi_{\rm I}^{(+)}$) отвечает движению центра по (против) оси x.

В формулах (1) — (3) и везде ниже используется система единиц, в которой $e=\hbar=m=1$.

2. Если ограничиться ради простоты случаем одинаковых центров, расположенных в каждый момент времени t симметрично относительно начала координат $x=0$ на расстоянии $2vt$ один от другого, то изучаемое нами уравнение можно записать в виде

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha\delta(x-vt)+\alpha\delta(x+vt)\right]\Psi_{\rm II}(x,t)=0. \qquad (4)$$

Наложим, далее, на решения уравнения (4) дополнительные условия

$$\Psi_{\rm II}(x,t)\,|_{x\simeq\pm vt}\sim\Psi_{\rm I}^{(\mp)}(x,t) \quad \text{при} \quad t\to\infty. \qquad (5)$$

Тогда, исходя из вида функций (3) и симметрии задачи (4), (5), естественно искать решение в виде

$$\Psi_{II}(x,t)=\sum_s C_s^{(1)}\varphi_s(|x-vt|,t)\exp\left[i\frac{v^2}{2}t+iv(x-vt)\right]+$$
$$+\sum_s C_s^{(2)}\varphi_s(|x-vt|,t)\exp\left[i\frac{v^2}{2}t-iv(x+vt)\right]. \tag{6}$$

Подстановка (6) в (4) дает условия на функции φ_s и константы $C_s^{(1,2)}$ следующего вида:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi_s(z,t)=0 \tag{7}$$

для всех s и

$$\sum_s\left[C_s^{(1)}\left(\alpha\varphi_s(0,t)+\left(\frac{\partial}{\partial z}\varphi_s\right)_{z=0}\right)+C_s^{(2)}e^{-2iv^2t}\alpha\varphi_s(2vt,t)\right]=0,$$
$$\tag{8}$$
$$\sum_s\left[C_s^{(2)}\left(\alpha\varphi_s(0,t)+\left(\frac{\partial}{\partial z}\varphi_s\right)_{z=0}\right)+C_s^{(1)}e^{-2iv^2t}\alpha\varphi_s(2vt,t)\right]=0;$$

здесь $z=|x-vt|$ и предполагается $t>0$.

Среди частных решений уравнения (7) содержатся функции вида

$$\varphi_s(z,t)=\exp\left(-a_sz+i\frac{a_s^2}{2}t\right), \tag{9}$$

где a_s — произвольные числа.

Подставляя (9) в (8) и учитывая условия (5), приходим к выводу, что достаточно считать $a_s=\alpha+2ivs$, причем $s\geqslant 0$. Тогда из соотношений (6) — (10) следует, что

$$\Psi_{II}(x,t)=\sum_{s=0}^{\infty}B_s\exp\left[i\frac{v^2}{2}t+iv(x-vt)-(\alpha+2ivs)|x-vt|+\frac{it}{2}(\alpha+2ivs)^2\right]+$$
$$\tag{10}$$
$$+\sum_{s=0}^{\infty}B_s\exp\left[i\frac{v^2}{2}t-iv(x+vt)-(\alpha+2ivs)|x+vt|+\frac{it}{2}(\alpha+2ivs)^2\right],$$

где

$$B_s=\frac{1}{s!}\left(\frac{\alpha}{2iv}\right)^s\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{i\alpha}{2v}\right).$$

Выбор B_s согласуется с тем, что при $t=0$ и $v\to 0$ (10) должно совпадать с функцией (2) с удвоенной константой α.

Отметим некоторые свойства найденного решения. Во-первых, (10) определяет волновую функцию, соответствующую «связанному» состоянию нашей системы, так как $|\Psi_{II}|\to 0$ при любом конечном t и $x\to\pm\infty$. Во-вторых, результат (10), по-видимому, позволяет утверждать, что система двух разбегающихся δ-потенциалов обладает, помимо стационарного уровня энергией $E=-\alpha^2/2$, бесконечной системой квазиуровней с продолжительностью жизни $\tau=1/(2v\alpha s)$, $s=1, 2\dots$ Как отмечено в ([3]), аналогичными свойствами обладают реальные нестабильные системы. Интересно также отметить, что при $t=0$ решение (10) имеет вид

$$\Psi_{II}(x,0)=(2\alpha)^{1/2}\exp\left[-\alpha|x|+i\alpha\frac{1-e^{-2iv|x|}}{2v}\right]\cdot\cos vx. \tag{11}$$

3. Выше найдено важное частное решение уравнения (4) при заданной асимптотике (5). Теперь перейдем к решению задачи Коши для этого уравнения. Для упрощения записи конечных формул будем предполагать, что начальная функция симметрична. Обобщение результатов на случай функции произвольной четности делается тривиально.

Подчиним теперь решения уравнения (4) условию

$$\Psi_{III}(x,\ t)\,|_{t=0}=u(x)\equiv u(-x). \tag{12}$$

Не вдаваясь в подробности выкладок, отметим лишь, что представление решения в виде

$$\Psi_{III}(x,\ t)\,|_{t=0}=\Psi_0(x,\ t)+\chi(x,\ t), \tag{13}$$

где

$$\Psi_0(x,t)=\frac{2}{(2\pi it)^{1/2}}\,e^{ix^2/(2t)}\int\limits_0^\infty dx'\,e^{ix'^2(2t)}u(x')\cos\frac{xx'}{t}, \tag{14}$$

сводит задачу (4), (12) к неоднородному уравнению для $\chi(x,\ t)$ с нулевым начальным условием, которое может быть решено последовательным применением двух интегральных преобразований. Первое из них состоит в замене

$$\chi(x,t)=\frac{i\alpha}{2}\int\limits_0^t\frac{d\tau f(\tau)}{[2\pi i(t-\tau)]^{1/2}}\,e^{i(\frac{1}{2}v^2)\tau}\left[e^{\frac{1}{2}i(x-v\tau)^2/(t-\tau)}+e^{\frac{1}{2}i(x+v\tau)^2/(t-\tau)}\right], \tag{15}$$

что сводит задачу к линейному интегральному уравнению относительно $f(t)$

$$f(t)=2\Psi_0(vt,t)+i\alpha\int\limits_0^t\frac{d\tau\, f(\tau)}{[2\pi i(t-\tau)]^{1/2}}\left[1+e^{2iv^2t\tau/(t-\tau)}\right], \tag{16}$$

которое, в свою очередь, может быть решено при помощи преобразования Лапласа. В результате получаем

$$\chi(x,t)=\frac{2i\alpha}{(2\pi it)^{1/2}}\,e^{ix^2/(2t)}\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty d\tau u(\tau)\cos v\tau\cdot\left[e^{-(y-i\tau)\xi_+}+e^{-(y-i\tau)\xi_-}\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left[i\alpha y+i\alpha e^{2iv\tau}\frac{1-e^{-2vy}}{2v}-\frac{i}{2t}(y-i\tau)^2\right], \tag{17}$$

где $\xi_\pm=|x\pm vt|/t$.

Непосредственная проверка (13) с учетом (14) и (17) показывает, что найденная функция $\Psi_{III}(x,\ t)$ удовлетворяет как уравнению (4), так и начальному условию (12).

4. Уравнение (4) может служить моделью для ряда физических процессов таких, как перезарядка, ионизация частиц и т. п., причем найденное решение, несомненно, будет полезно в тех случаях, когда невозможно разложение по константам α, v или каким-либо их комбинациям.

С точки зрения применения потенциалов нулевого радиуса действия к описанию конкретных физических задач важно отметить работу ([4]), в которой рассмотрен отрыв электрона при медленном столкновении отрицательного иона с атомом. При этом своеобразно учтено относительное движение атомов: потенциальные ямы считались покоящимися, а изменение глубины их уровней связывалось со скоростью движения частиц. В то же время указывалось на необходимость решения задачи для движущихся ям постоянной глубины уровня, т. е. в постановке, близкой к использованной в данной работе.

Подход, использованный в [4], приводит к интегральному уравнению, аналогичному (16) (см. уравнение (5) в [4]) с ядром, зависящим от разности $t-\tau$. Нетрудно видеть, что ядро уравнения (16) после замены $u=1/t$ и $u'=1/\tau$ также можно привести к разностному виду $K(u'-u)$, что и позволяет дать его решение, применив преобразование Лапласа. Это является следствием явного учета скорости в потенциале взаимодействия, что не использовано в [4]. Кроме того, такой подход не отрицает введения переменной глубины уровней ям, если это окажется необходимым в конкретных приложениях. Возможно, что соответствующая модификация использованной нами модели для трехмерного случая позволит непосредственным образом учесть влияние относительной скорости частиц.

Авторы признательны В. И. Когану за интерес к работе.

Московский инженерно-физический институт

Поступило 25 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев,* ЖЭТФ, т. 50, 1393 (1966). [2] *Ю. А. Бычков,* Письма ЖЭТФ, т. 17, 266 (1973). [3] *А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов,* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, «Наука», 1971. [4] *Ю. Н. Демков,* ЖЭТФ, т. 49, 885 (1965).