

УДК 533.95

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. В. ЗМИТРЕНКО, С. П. КУРДЮМОВ

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ СЖАТИЯ КОНЕЧНОЙ МАССЫ ПЛАЗМЫ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 7 II 1974)

В работе рассмотрен новый класс автомодельных решений для задачи сжатия конечной массы плазмы поршнем с заданным на нем гидродинамическим и тепловым режимом.

Решения в разделяющихся переменных рассматривались ранее для задач разлета конечной массы плазмы (1-5, 13). При установлении автомодельного режима сжатия возникает монотонное по времени сжатие всех участков плазмы, не сопровождающееся распространением по массе ударных, тепловых, других волн конечной амплитуды. Впервые решение с остановившимся фронтом волны было получено в (6) при изучении процессов нелинейной теплопроводности.

В частных случаях найдены аналитические решения задачи. Правильность найденной автомодельности подтверждена выходом на автомодельный режим при расчетах на ЭВМ соответствующей задачи в частных производных.

1°. Система уравнений в лагранжевых массовых координатах имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (r^N v), \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -r^N \frac{\partial}{\partial x} (p-D) + N \frac{D-D'}{\rho r}, \\ \frac{zR}{\gamma-1} \frac{\partial T_e}{\partial t} + p_e \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (r^N \Omega_e) + \frac{W_e}{\rho} - \frac{W_R}{\rho} + \frac{Q}{\rho}, \\ \frac{R}{\gamma-1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + p_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (r^N \Omega_1) + \frac{W_1}{\rho} + \frac{\Phi}{\rho} - \frac{Q}{\rho}, \\ \Omega_1 &= -\alpha_1 \rho r^N \frac{\partial T_1}{\partial x}, \quad \Omega_e = -\alpha_e \rho r^N \frac{\partial T_e}{\partial x}, \quad Q = \xi (T_1 - T_e); \\ D &= \rho (\gamma/3 \eta + \xi) r^N \frac{\partial v}{\partial x} + N (\xi - 2/3 \eta) \frac{v}{r}, \\ D' &= \rho (\xi - 2/3 \eta) r^N \frac{\partial v}{\partial x} + N [\xi + (\gamma/3 - N) \eta] \frac{v}{r}, \\ \Phi &= \rho r^N D \frac{\partial v}{\partial x} + N \frac{v D'}{r}, \quad p = p_1 + p_e = \rho R (T_1 + z T_e), \quad p \rho^{-\gamma} = \Sigma = \Sigma_0 e^{\delta \tau} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_e &= a_1 T_e^{m_1} \rho^{k_1}, \quad \alpha_1 = a_2 T_1^{m_2} \rho^{k_2}, \quad \eta = a_3 T_1^{m_3} \rho^{k_3}, \quad \xi = a_4 T_e^{m_4} \rho^{k_4}, \quad \zeta = a_5 T_1^{m_5} \rho^{k_5}, \\ W_1 &= \frac{a_6 T_1^{m_6} \rho^{k_6}}{1 + a_8 T_1^{m_8} \rho^{k_8}}, \quad W_e = \frac{a_7 T_1^{m_7} \rho^{k_7}}{1 + a_9 T_1^{m_9} \rho^{k_9}}, \quad W_R = a_{10} T_e^{m_{10}} \rho^{k_{10}}; \end{aligned}$$

здесь  $D$  и  $D'$  — составляющие тензора вязких напряжений,  $Q$  — скорость обмена энергией в единице объема между ионой и электронной температурами,  $W_1$ ,  $W_e$  — объемные источники энергии,  $\Phi$  — объемный источник энергии за счет вязкой диссипации,  $W_R$  — сток энергии за счет объемного

излучения,  $N=0, 1, 2$  для случаев плоской, осевой и центральной симметрии соответственно. Остальные обозначения общеприняты.

Поршень сжимает конечную массу  $[2\pi N + 1/2(2-N)(1-N)]M_0$ . Граничные условия на поршне ( $x=M_0$ )

$$\begin{aligned} v(M_0, t) &= v_0 t^{n-1} \text{ либо } p(M_0, t) - D(M_0, t) = p_0 t^{-n_1}; \\ \Omega_{1,e}(M_0, t) &= \Omega_{01,e} t^{-n_2} \text{ либо } T_{1,e}(M_0, t) T_{01,e} t^{-n_3} \end{aligned} \quad (2)$$

и в центре ( $x=0$ )

$$v(0, t) = 0, \quad \Omega_1(0, t) = \Omega_c(0, t) = 0. \quad (3)$$

В рассматриваемых режимах влияние начальных данных через некоторое время становится несущественным и изменение величин в плазме определяется исключительно граничными режимами и свойствами плазмы.

2°. Все функции представляются в виде  $F_1(x, t) = B_1 t^{n_1} j_1(s)$ , где размерные постоянные  $B_1$  выражаются через определяющие параметры  $M_0, v_0, R$ , а безразмерная переменная имеет вид  $s = x/M_0$ . В указанном смысле задача автомодельна при выполнении условий

$$\begin{aligned} n_1 &= 2+n(N-1), \quad n_2 = 3+n(N-2), \quad n_3 = 2(1-n), \\ n &= \frac{2m_1-1}{2m_1-k_1(N+1)+N-1} = \frac{2m_2-1}{2m_2-k_2(N+1)+N-1} = \\ &= \frac{2m_3-1}{2m_3-k_3(N+1)+N-1} = \frac{2m_4-1}{2m_4-k_4(N+1)+N-1} = \frac{2m_5-1}{2m_5-k_5(N+1)+N-1} = \\ &= \frac{2m_6-3}{2m_6-k_6(N+1)+N-1} = \frac{2m_7-3}{2m_7-k_7(N+1)+N-1} = \\ &= \frac{2m_8}{2m_8-k_8(N+1)} = \frac{2m_9}{2m_9-k_9(N+1)} = \frac{2m_{10}-3}{2m_{10}-k_{10}(N+1)+N-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Искомые функции записываются в безразмерном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= \frac{r}{r_0}, \quad \alpha(s) = \frac{vt}{r_0}, \quad \delta(s) = \frac{\rho r_0^{N+1}}{M_0}, \quad \theta_{1,e}(s) = \frac{T_{1,e} R t^2}{r_0^2}, \\ \omega_{1,e}(s) &= \frac{\Omega_{1,e} t^3}{r_0^{2-N} M_0}, \quad \beta(s) = \frac{p t^2}{r_0^{1-N} M_0}, \quad \tilde{\alpha}_{1,e}(s) = \frac{\alpha_{1,e} t}{r_0^{1-N} M_0 R}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sigma(s) = \frac{\sum t^{2(1-n/n^*)}}{M_0^{1-\gamma} v_0^{2/n^*}}, \quad r_0 \equiv v_0 t^n, \quad n^* \equiv \frac{2}{(N+1)(\gamma-1)+2} \text{ и т. д.}$$

Формулы (5) дают законы изменения со временем всех величин в данной точке с координатой  $x$ . Поведение величин по пространству дается безразмерными функциями  $\lambda(s), \alpha(s), \delta(s)$  и т. д., определяемыми при решении системы безразмерных автомодельных уравнений. Безразмерные константы  $A_1$ , соответствующие  $a_1$ , имеют вид

$$A_1 = a_1 / (v_0^{h_1(N+1)-2m_1+1-N} M_0^{1-h_1} R^{1+m_1}) \text{ и т. д.}$$

3°. Для задач сжатия время меняется в пределах от  $-\infty$  до 0 ( $t, s$ ). Моменту  $t=0$  (фокусировки) соответствует сжатие массы до бесконечной плотности. Отрицательное время определяет знаки безразмерных величин в (5). Комбинация  $v_0 t^n$ , имеющая смысл радиуса, положительна, поэтому из (5) следует, что для задач сжатия  $\lambda, \alpha, \delta, \beta, \theta_{1,e}$  положительны, а

$\tilde{\kappa}_{1,e}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}, \tilde{\xi}, w_{1,e}, w_n, \varphi$ , а также скорость  $v$  отрицательны при любом  $n$ . Размерные коэффициенты диссипации, разумеется, положительны.

Таким образом, автомодельные задачи сжатия и разрежения конечной массы плазмы описываются одной и той же системой безразмерных уравнений. Для задачи сжатия время меняется от  $-\infty$  до 0, а безразмерные константы  $A_i < 0$  ( $i \neq 8, 9$ ). Для задачи разрежения время меняется от 0 до  $\infty$ , все  $A_i > 0$ . Формулы (5) дают различный характер изменения величин со временем для задачи разлета ( $0 < t < \infty$ ) и для задачи сжатия ( $-\infty < t < 0$ ). В режимах сжатия энтропия убывает при  $n > n_*$  и возрастает при  $n < n_*$ . Для разрежения имеют место обратные утверждения. При  $n = n_*$  энтропия неизменна во времени. В этом случае временные зависимости величин были получены независимо в (9, 10). Полный тепловой поток имеет вид  $G = (2\pi N + 1/2)(2 - N)(1 - N)r^N(\Omega_1 + \Omega_e)$ . Его зависимость от времени при  $n = n_*$  есть  $G \sim t^{-(3(N+1)(\gamma-1)+2)/((N+1)(\gamma-1)+2)}$ . При  $N=2, \gamma=5/3$  получаем  $G \sim t^{-2}, -\infty < t < 0$ . Этот режим для потока лазерного излучения предложен в (11) для адиабатического сверхвысокого обжатия центральных частей капли плазмы.

4°. Пусть граница сжимаемой массы движется по закону  $r_n = (v_0/n)t^n$ . Для адиабатического процесса  $n = n_*, p = \Sigma_0 \rho^\gamma$ .

Для однотемпературной задачи без учета диссипативных процессов и объемных источников и стоков решение системы безразмерных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} r &= \lambda v_0 t^n, \quad v = n_* (v_0 t^{n_*}) t^{-1} \lambda, \quad \rho = M_0 (v_0 t^{n_*})^{-N-1} \delta(\lambda), \\ T &= (v_0 t^{n_*})^2 R^{-1} t^{-2} \sigma_0 \delta^{\gamma-1}(\lambda), \quad p = M_0 (v_0 t^{n_*})^{1-N} t^{-2} \sigma_0 \delta^\gamma(\lambda), \\ \delta(\lambda) &= \{(N+1)(\gamma-1)^2 (\sigma_0 \gamma)^{-1} [(N+1)(\gamma-1)+2]^{-2} (c_1 + \lambda^2)\}^{1/(\gamma-1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Постоянная интегрирования  $c_1$  находится из условия  $M_0 = \int_0^{r_n} \rho r^N dr$ , определяющего  $c_1 = c_1(\sigma_0, \gamma, N)$ . Из требования  $\theta \geq 0$  вытекает условие  $c_1 \geq 0$ , приводящее в случае  $N=2, \gamma=5/3$  к  $\sigma_0 \geq 0,242$ ; отсюда вытекает ограничение на константу в законе скорости поршня  $v_0^4 \leq 4,14 \Sigma_0 M_0^{2/3}$ . При малых  $c_1$  функции  $\delta, \beta, \theta$  существенно растут от центра к поршню. В предельном случае, когда в центре ( $\lambda=0$ )  $\theta = \delta = \beta = 0$ , решение задачи записывается в эйлеровых координатах в виде

$$T = \frac{1}{20R} \frac{r^2}{t^2}, \quad v = \frac{1}{2} \frac{r}{t}, \quad \rho = \frac{3}{32} \frac{M_0}{v_0^6} \frac{r^3}{t^3}, \quad p = \frac{3}{640} \frac{M_0}{v_0^6} \frac{r^5}{t^5}. \quad (7)$$

Решение (7) в массовых координатах имеет вид

$$r(x, t) = 2(v_0 t^{1/2}) \frac{x^{1/6}}{M_0^{1/6}}, \quad p(x, t) = \frac{3}{20} \frac{M_0^{1/6} x^{3/6}}{t^2 (v_0 t^{1/2})} \text{ и т. д.} \quad (8)$$

5°. При  $n=1$  для однотемпературной среды при учете в ней одной гидродинамики с нелинейной теплопроводностью  $\kappa = A\theta^m \delta^k$  и граничными условиями на поршне вида  $v_n = v_0, T_n = v_0^2 \theta_n / R$  имеет место решение

$$p = M_0 \beta_0 (v_0 t)^{1-N} t^{-2}, \quad v = v_0 \lambda, \quad T = \frac{v_0^2}{R} \left\{ \left( c_1 + \frac{\beta_0^{1-k} \lambda^2}{2A} \right) (m-k+1) \right\}^{1/(m-k+1)}, \quad (9)$$

$$\rho = M_0 \beta_0 \{ [c_1 + \beta_0^{1-k} \lambda^2 / (2A)] (m-k+1) \}^{-1/(m-k+1)} \cdot (v_0 t)^{-N-1}, \quad \lambda = r / (v_0 t),$$

где  $\beta_0$  и  $c_1$  — постоянные интегрирования.

При значениях параметров  $m = k = 2/3, A = -1/2, N=2, \theta_n = 1, s_n = 1/4$  численно решена задача выхода на автомодельный режим для системы (1) с условиями (2), (3). Сдвигом времени  $t \rightarrow t + t_0$  момент фокусировки помещался в точку  $t_0 = 1$ . Начальные профили задавались в момент  $t=0$  в виде

$\rho = \rho_0$ ,  $T = T_0$ ,  $v = -nr/t_0$ . Результаты расчетов (см. рис. 1) показывают выход на автомодельное решение, совпадающее с (9).

6°. Для случая полностью ионизированной плазмы ( $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = 5/2$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = k_5 = 0$ ,  $m_4 = -3/2$ ,  $k_4 = 2$ ) автомодельная задача сжатия или разрыва конечной массы имеет место при  $n = n_R = 4/(4+N)$ . Благодаря из-

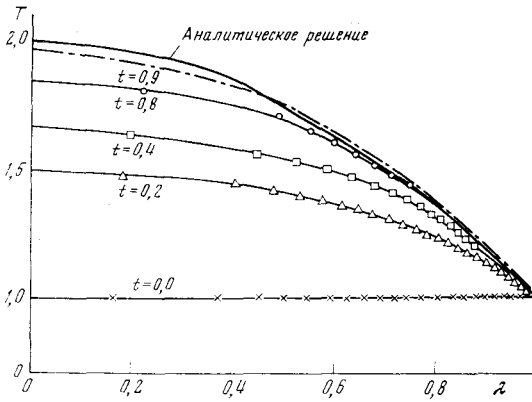


Рис. 1

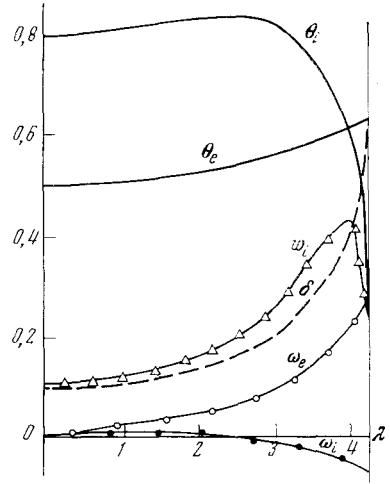


Рис. 2

менению  $\gamma$  возможны режимы  $n = n_R \leq n$ . В этих случаях решение находится численным интегрированием системы безразмерных уравнений с соответствующими граничными условиями. На рис. 2 приведены результаты такого решения для  $N=2$ ,  $\gamma=1,2$ ,  $n = n_R = 2/3 < n_* = 0,7692$ . Учитываются электронная и ионная теплопроводности — коэффициенты  $\kappa_e = 10\theta_e^{5/2}$ ,  $\tilde{\kappa}_i = 0,274\theta_i^{5/2}$ , обменный член  $\xi = 0,944\delta^2\theta_e^{-3/2}$  и объемное энерговыделение  $w_1 = 3\theta_1^{1,684,3}$ . Зависимость величин от времени в данном примере имеет вид

$$v \sim t^{-1/3}, \quad \rho \sim t^{-2}, \quad T_{i,e} \sim t^{2/3}, \quad \Omega_{i,e} \sim t^{-3}, \quad G \sim t^{5/3}, \quad -\infty < t < 0.$$

Более подробное исследование рассмотренных в статье режимов сжатия конечной массы плазмы содержится в (12).

Институт прикладной математики  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
29 I 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> И. В. Немчинов, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 1, 17 (1967). <sup>2</sup> В. Е. Неуважнев, ПММ, т. 30, 1015 (1966). <sup>3</sup> П. П. Волосевич, В. С. Соколов, Магнитная гидродинамика, т. 1, 43 (1967). <sup>4</sup> А. Н. Тихонов, А. А. Самарский и др., Эффект T-слоя в магнитной гидродинамике, М., 1965. <sup>5</sup> П. П. Волосевич, С. П. Курдюмов и др., Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 10, № 6, 1447 (1970). <sup>6</sup> А. А. Самарский, И. М. Соболев, там же, т. 3, № 4, 702 (1963). <sup>7</sup> G. Guderley, Luftfahrtforschung, v. 19, № 9, 302 (1942). <sup>8</sup> К. П. Станюкович, Неуставившиеся движения сплошной среды, «Наука», 1971. <sup>9</sup> J. S. Clarke, H. N. Fisher, R. J. Mason, Phys. Rev. Lett., v. 30, № 3, 89 (1973). <sup>10</sup> С. И. Анисимов, Письма ЖЭТФ, т. 16, № 10, 570 (1972). <sup>11</sup> J. Nuckolls, L. Wood et al., Nature, v. 239, № 5368, 139 (1972). <sup>12</sup> Н. В. Змигренко, С. П. Курдюмов, Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы, препринт Ин-та прикладной математики АН СССР, № 16, 1973. <sup>13</sup> Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, «Наука», 1965.