

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

А. К. ГРИНЦЕВИЧЮС

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРЯМОЙ

(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 22 IV 1974)

Группа линейных преобразований прямой изоморфна группе G всех вещественных матриц вида

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X > 0.$$

Пусть случайные матрицы

$$\begin{pmatrix} \xi_j & \eta_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_j > 0 \text{ (вер. 1)}, \quad j=1, 2, \dots,$$

независимы и одинаково распределены. Предельное поведение элементов произведения

$$\begin{pmatrix} \rho_n & \psi_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} \xi_n & \eta_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

изучалось в ⁽¹⁾ и ⁽²⁾. У. Гренандер ⁽¹⁾ рассматривал случай, когда $M \ln \xi_1 > 0$ или $M \ln \xi_1 < 0$, и высказал гипотезу, что в случае $M \ln \xi_1 = 0$ асимптотическое распределение случайной величины $\ln |\psi_n|$ асимптотически такое же, как и распределение $\max_{1 \leq v \leq n} S_v$, где $S_v = \ln \xi_1 + \dots + \ln \xi_n$. В ⁽²⁾

рассмотрен простейший случай, когда случайная матрица $\begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ принимает всего два значения, и замечено, что гипотеза У. Гренандера неверна, если носитель случайного элемента $\begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ содержится в некоторой одномерной подгруппе группы G .

В дальнейшем предполагаем, что $M \ln \xi_1 = 0$ и носитель случайной матрицы $\begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не содержится в одномерной подгруппе группы G . Основную часть работы занимает исследование случайной величины $\psi_n / \exp \max_{1 \leq v \leq n} S_v$.

Рассмотрим случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_1 = \ln \xi_1, \dots, \quad S_n = \ln \xi_1 + \dots + \ln \xi_n, \dots \quad (1)$$

Пусть $L_0 = 0$, $L_1, L_2, \dots$ — первый, второй, ... строгие верхние лестничные моменты этого случайного блуждания, $Q = Q(n)$ — число всех строгих лестничных моментов до момента n включительно, а случайные величины $K_0, K_1, K_2, \dots$ и $\bar{K}_Q = \bar{K}_Q(n)$ определяются из неравенств

$$L_j \leq K_j < L_{j+1}, \quad S_{K_j} = S_{L_j}, \quad S_{K_{j+1}} < S_{K_j}, \dots, S_{L_{j+1}-1} < S_{K_j}; \quad j=0, 1, 2, \dots$$

$$L_Q \leq \bar{K}_Q \leq n, \quad S_{L_Q} = S_{\bar{K}_Q}, \quad S_{\bar{K}_Q+1} < S_{\bar{K}_Q}, \dots, \quad S_n < S_{\bar{K}_Q}.$$

Обозначим

$$\delta_0 = \eta_1 + \eta_2 \xi_1 + \dots + \eta_K \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_{K_0-1},$$

$$(\sigma_j, \varphi_j) = (\eta_{K_{j-1}+1} + \eta_{K_{j-1}+2} \xi_{K_{j-1}+1} + \dots + \eta_K \xi_{K_{j-1}+1} \cdot \dots \cdot \xi_{K_j-1}, \xi_{K_{j-1}+1} \cdot \dots \cdot \xi_{K_j}),$$

$$\bar{\delta}_Q = \eta_{K_Q-1+1} + \eta_{K_Q-1+2} \xi_{K_Q-1+1} + \dots + \eta_{\bar{K}_Q} \xi_{K_Q-1+1} \cdot \dots \cdot \xi_{\bar{K}_Q-1}.$$

Тогда случайная величина $\psi_n / \exp \max_{0 \leq v \leq n} S_v$ представляется в виде

$$\frac{\psi_n}{\exp \max_{0 \leq v \leq n} S_v} = \frac{\eta_1 + \eta_2 \xi_1 + \dots + \eta_n \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_{n-1}}{\exp S_{K_Q}} = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = I_1(n) \delta_0 \varphi_1^{-1} \cdot \dots \cdot \varphi_Q^{-1} + \delta_1 \varphi_1^{-1} \cdot \dots \cdot \varphi_Q^{-1} + \delta_2 \varphi_2^{-1} \cdot \dots \cdot \varphi_Q^{-1} + \dots + \bar{\delta}_Q \varphi_Q^{-1},$$

$$I_2 = I_2(n) = \eta_{\bar{K}_Q+1} + \eta_{\bar{K}_Q+2} \xi_{\bar{K}_Q+1} + \dots + \eta_n \xi_{\bar{K}_Q+1} \cdot \dots \cdot \xi_{n-1}.$$

Лемма 1. Двумерные случайные величины (δ_j, φ_j) , $j=1, 2, \dots$, независимы и одинаково распределены.

Лемма 2. Случайные величины (размерность этих величин тоже случайна) $[Q(\delta_1, \varphi_1), \dots, (\delta_Q, \varphi_Q)]$ и $[Q, (\bar{\delta}_Q, \varphi_Q), \dots, (\delta_1, \varphi_1)]$ одинаково распределены.

Леммы 1 и 2, так же как и формулируемые ниже леммы 5 и 8, доказываются комбинаторными методами.

Лемма 3. Пусть $M \ln^+ |\delta_1 \varphi_1^{-1}| < +\infty$; тогда последовательность случайных величин $I_1(n)$ слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к сходящемуся с вероятностью 1 ряду

$$\delta_1 \varphi_1^{-1} + \delta_2 \varphi_1^{-1} \varphi_2^{-1} + \dots + \delta_m \varphi_1^{-1} \cdot \dots \cdot \varphi_m^{-1} + \dots \quad (2)$$

Так как ряд (2) сходится почти всюду (см. (5)), то лемма 3 есть непосредственное следствие лемм 1 и 2.

Рассмотрим теперь случайную величину I_2 . Пусть $R_0=0, R_1, R_2, \dots$ — первый, второй, ... строгие нижние лестничные моменты случайного блуждания (1), случайная величина $T=T(n)$ — число всех строгих нижних лестничных моментов до времени n , включительно. Обозначим

$$(\delta'_j, \varphi'_j) = \eta_{R_{j-1}+1} \xi_{R_{j-1}+1}^{-1} + \dots + \eta_{R_j} (\xi_{R_{j-1}+1} \cdot \dots \cdot \xi_{R_j})^{-1}, (\xi_{R_{j-1}+1} \cdot \dots \cdot \xi_{R_j})^{-1}.$$

Из двойственности легко получить, что I_2 распределена так же, как и $\delta'_1 (\varphi'_1 \cdot \dots \cdot \varphi'_T)^{-1} + \delta'_2 (\varphi'_2 \cdot \dots \cdot \varphi'_T)^{-1} + \dots + \delta'_T (\varphi'_T)^{-1}$.

Лемма 4. Случайные величины (δ'_j, φ'_j) , $j=1, 2, \dots$, независимы и одинаково распределены. Если $M \ln^+ |\delta'_1 (\varphi'_1)^{-1}| < +\infty$, то последовательность случайных величин $I_2(n)$ слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к сходящемуся с вероятностью 1 ряду

$$\delta'_1 (\varphi'_1)^{-1} + \delta'_2 (\varphi'_1 \varphi'_2)^{-1} + \dots + \delta'_m (\varphi'_1 \cdot \dots \cdot \varphi'_m)^{-1} + \dots \quad (3)$$

Лемма 5. Пусть $M \ln^+ |\delta'_1 (\varphi'_1)^{-1}| < +\infty$ и $M \ln^+ |\delta_1 \varphi_1^{-1}| < +\infty$, тогда распределение случайной величины $\psi_n / \exp \max_{0 \leq v \leq n} S_v$ сходится к композиции распределений сходящихся с вероятностью 1 рядов (2) и (3).

Дадим достаточные условия для ограниченности математического ожидания $M \ln^+ |\delta_1 \varphi_1^{-1}|$. Условия для конечности $M \ln^+ |\delta'_1 (\varphi'_1)^{-1}|$ аналогичны.

Лемма 6. Если $M L_1^\varepsilon < +\infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и $M (\ln^+ |\eta_1|)^{1/\varepsilon} < +\infty$, то $M \ln^+ |\delta_1 \varphi_1^{-1}| < +\infty$.

Лемма 7. Пусть $M |\ln \xi_1|^{2+\varepsilon} < +\infty$ для некоторого $1 \geq \varepsilon > 0$; тогда $M L_1^{\varepsilon/2-\varepsilon_1} < +\infty$ для любого числа $\varepsilon_1 > 0$.

В доказательстве леммы 7 используется теорема Спарре — Андерсена (см. (3)).

Следующая лемма утверждает об асимптотической слабой независимости случайных величин $(S_n/\sqrt{n}, \max_{0 \leq v \leq n} S_v/\sqrt{v})$ и $\psi_n/\exp \max_{0 \leq v \leq n} S_v$.

Лемма 8. Пусть $D \ln \xi_1 < +\infty$, $M \ln^+ |\delta_1 \varphi_1^{-1}| < +\infty$ и $M \ln^+ |\delta_1' (\varphi_1')^{-1}| < +\infty$.

Тогда распределение трехмерной случайной величины $[(S_n/\sqrt{n}, \max_{0 \leq v \leq n} S_v/\sqrt{v}), \psi_n/\exp \max_{0 \leq v \leq n} S_v]$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к прямому произведению предельных распределений случайных величин $(S_n/\sqrt{n}, \max_{0 \leq v \leq n} S_v/\sqrt{v})$ и $\psi_n/\exp \max_{0 \leq v \leq n} S_v$.

Для получения предельной теоремы важно, какое распределение имеют ряды (2) и (3).

Лемма 9. Пусть выполнены условия леммы 8; тогда ряды (2) и (3) имеют непрерывные функции распределения.

Доказательство. Если, например, распределение ряда (2) имеет атом, то $\delta_1 \varphi_1^{-1} + c \varphi_1^{-1} = c$ (см. (5)) или $\delta_1 - c \varphi_1 = -c$ для некоторого вещественного числа c . Нетрудно показать, что тогда и $\eta_1 - c \xi_1 = -c$, т. е. носитель случайного элемента $\begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ сосредоточен в одномерной подгруппе, что противоречит нашим предположениям.

Непосредственным следствием предыдущих лемм является

Теорема 1. Пусть $M(\ln \xi_1)^{2+\varepsilon_1} < +\infty$ и $M(\ln^+ |\eta_1|)^{2/\varepsilon_1+\varepsilon_2} < +\infty$ для некоторых $1 \geq \varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$.

Тогда распределение случайной величины

$$\left\{ \left[\frac{\ln \rho_n}{\sqrt{n}}, \frac{\ln \sup(1, \rho_1, \dots, \rho_n)}{\sqrt{n}} \right], \psi_n / \sup(1, \rho_1, \dots, \rho_n) \right\}$$

сходится при $n \rightarrow \infty$ к прямому произведению предельных распределений случайных величин $\left[\frac{\ln \rho_n}{\sqrt{n}}, \frac{\ln \sup(1, \rho_1, \dots, \rho_n)}{\sqrt{n}} \right]$ и $\psi_n / \sup(1, \rho_1, \dots, \rho_n)$.

Первое из этих предельных распределений определяется функцией распределения

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\alpha-2\beta}^{\alpha} e^{-x^2/2\sigma^2} dx, \quad \alpha \leq \beta, \quad \beta \geq 0, \quad \sigma = \sqrt{D \ln \xi_1} \quad (\text{см. (4)}).$$

Второе является композицией непрерывных распределений сходящихся с вероятностью 1 рядов (2) и (3).

Из теоремы 1 вытекает предельная теорема для случайной величины $(\rho_n, |\psi_n|, \operatorname{sgn} \psi_n)$:

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1.

Тогда существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\psi_n > 0\} = p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\psi_n < 0\} = q, \quad p + q = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\ln \rho_n}{\sqrt{n}} \leq \alpha, \frac{\ln \psi_n}{\sqrt{n}} \leq \beta, \psi_n > 0 \right\} = p \Phi(\min(\alpha, \beta^+), \beta^+),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\ln \rho_n}{\sqrt{n}} \leq \alpha, \frac{\ln(-\psi_n)}{\sqrt{n}} \leq \beta, \psi_n < 0 \right\} = q \Phi(\min(\alpha, \beta^+), \beta^+).$$

Как следствие из теорем 1 и 2 получаем, что распределение случайной величины $\ln |\psi_n| - \max_{0 \leq v \leq n} S_v$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к непрерывному собствен-

ному распределению и предельные распределения случайных величин $(\ln \psi_n)/\sqrt{n}$ и $\max_{0 \leq v \leq n} S_v/\sqrt{n}$ совпадают. По-видимому, это и можно считать подтверждением гипотезы У. Гренандера.

Автор благодарит В. М. Максимова за постановку задачи и внимание к работе.

Институт физики и математики
Академии наук ЛитССР
Вильнюс

Поступило
8 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ U. Grenander, Arkiv mat., B. 4, 189 (1961). ² В. М. Максимов, Теория вероятн. и ее примен., т. 18, в. 3, 547 (1973). ³ В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., 1967. ⁴ А. А. Боровков, Сибирск. матем. журн., т. 3, № 5, 645 (1962). ⁵ А. К. Гринцевичюс, Теория вероятн. и ее примен., т. 19, в. 1, 163 (1974).