Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 1

УДК 517.944 *МАТЕМАТИКА*

А. А. ДЕЗИН

ОПИСАНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 15 IV 1974)

1. Пусть V — область эвклидова пространства $\mathbf{R}^n$ с компактным замыканием и границей, обладающей некоторой регулярностью (например, кусочно-гладкой); $\mathbf{H}=\mathbf{H}(V)$ — гильбертово пространство комплексных функций с суммируемым в V квадратом модуля и L — линейная дифференциальная операция с частными производными и постоянными коэффициентами. Рассматривая L как оператор L: $\mathbf{H}\to\mathbf{H}$, определенный на $C_0^\infty(V)$ — линейном многообразии бесконечно дифференцируемых функций, тождественно равных нулю на границе V, и взяв его замыкание в $\mathbf{H}$, получим так называемый минимальный оператор L_0: $\mathbf{H}\to\mathbf{H}$, связанный с L. Заменяя $C_0^\infty(V)$ на $C^\infty(V)$ — многообразие гладких функций без каких-либо граничных условий, получим аналогично так называемый максимальный оператор $\tilde{L}$: $\mathbf{H}\to\mathbf{H}$, связанный с L. Очевидно, $L_0\subset\tilde{L}$.

Известно ([1]), что для L_0 всегда существует ограниченный обратный L_0^{-1} (заданный на неплотном в $\mathbf{H}$ множестве), а область значений $\tilde{L}$ совпадает со всем пространством $\mathbf{H}$ (но оператор $\tilde{L}^{-1}$ не определен). Воспользовавшись теоремой Банаха можно отсюда заключить, что существуют операторы L_p (будем называть их правильными) такие, что $L_0\subset L_p\subset\tilde{L}$, причем оператор L_p^{-1} существует, ограничен и определен на всем $\mathbf{H}$. Все операторы, связанные с классическими граничными задачами для уравнений в частных производных, являются правильными. Но эффективное описание правильных операторов в общем случае (т. е. описание их области определения с помощью условий типа граничных) является сложной и мало исследованной задачей.

В данной статье приводится описание всех правильных операторов, связанных с обыкновенной дифференциальной операцией, заданной на отрезке вещественной оси. При переходе к операторным уравнениям полученный результат позволяет показать, что использование «нестандартных» граничных условий типа приведенных в ([2], [3]) для описания неклассических правильных операторов является в определенном смысле естественным. Приводимые конструкции показывают связь рассматриваемого круга вопросов со спектральной теорией операторов.

2. Пусть L — обыкновенная линейная дифференциальная операция порядка n с достаточно гладкими коэффициентами (старший коэффициент равен единице), определенная на отрезке $l=[0, a]$ вещественной оси. С операцией L можно связать, как и в описанной выше ситуации, минимальный и максимальный операторы L_0, $\tilde{L}$: $\mathbf{H}(l)\to\mathbf{H}(l)$. Пусть, кроме того, L_c — правильный оператор, порождаемый L при граничных условиях Коши: $u^{(k)}(0)=0$; $k=0, 1, \ldots, n-1$. (L_c — замыкание в $\mathbf{H}$ операции L, рассматриваемой на линейном многообразии гладких функций, подчиненных указанным условиям.)

Определение. Линейный оператор $\hat{L}\subset\tilde{L}$ назовем разрешимым сужением оператора $\tilde{L}$, если $\hat{L}^{-1}$ существует, ограничен и определен на всем $\mathbf{H}$.

П р е д л о ж е н и е 1. Если $\hat{L}$ — разрешимое сужение оператора L, то *для любой* $f \in \mathbf{H}$

$$\hat{L}^{-1} f = L_c^{-1} f + \sum_0^{n-1} l_k(f)\,\omega_k, \tag{1}$$

где l^k *— ограниченные линейные функционалы над* $\mathbf{H}$, *а* $\{\omega_k\}_0^{n-1}$ *— некоторая фиксированная фундаментальная система решений уравнения* $Lw=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно заметить, что, как и в классическом случае, всякое решение уравнения $Lu=f$ представимо в виде (1) при некоторых постоянных l_k. Эти постоянные зависят, вообще говоря, от f и от выбранного сужения. Зависимость линейна в силу линейности $\hat{L}$; соответствующие функционалы ограничены в силу ограниченности оператора $\hat{L}^{-1}$ и независимости системы функций $\{\omega_k\}$. Доказательство закончено.

Условимся обозначать в дальнейшем через $\mathfrak{D}(T)$ область определения линейного оператора T.

С л е д с т в и е. *Для разрешимого сужения* $\hat{L}$ *область* $\mathfrak{D}(\hat{L})$ *состоит из элементов* $u \in \mathfrak{D}(\tilde{L})$, *удовлетворяющих дополнительно системе условий*

$$u^{(j)}|_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (q_k, \tilde{L}u)\,\omega_k^{(j)}(0), \quad j=0,\ldots,\ n-1; \tag{2}$$

здесь круглые скобки — скалярное произведение в $\mathbf{H}$, *а* $\{q_k\}_0^{n-1}$ *— некоторый набор элементов* $\mathbf{H}$, *определяющий разрешимое сужение.*

Для доказательства достаточно заметить, что элемент $u \in \mathfrak{D}(\tilde{L})$ имеет n обобщенных производных, и рассмотреть равенство $u=\hat{L}^{-1}f$, воспользовавшись формулой (1), в которой функционалы $l_k(f)$ представлены (по теореме Рисса) скалярными произведениями $(q_k, f)=(q_k, \tilde{L}u)$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Разрешимое сужение* $\hat{L} \subset \tilde{L}$ *является расширением минимального оператора* L_0 *тогда и только тогда, когда элементы* $\{q_k\}$ *в формуле* (2) *принадлежат ядру оператора* $\tilde{L}^t$, *где* L^t *— транспонированная (формально сопряженная) относительно* L *операция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $v \in \mathfrak{D}(L_0)$ и $L_0 v = g$. Поскольку $L_0 \subset \hat{L}$, $v \in \mathfrak{D}(\hat{L})$ и для v справедлива формула (2), причем $v^{(j)}|_0=0$ при всех j. Отсюда (из независимости $\omega_k^{(j)}$) следует, что в этом случае $(q_k, L_0 v)=0$ при всех k и произвольной $v \in \mathfrak{D}(L_0)$. Но это и означает, что q_k принадлежит ядру $\tilde{L}^t$ (поскольку для обыкновенного дифференциального оператора «сильное» расширение — замыканием и «слабое» — через сопряженный оператор всегда эквивалентны ([4], [5])).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если элементы $\{q_k\}$ в (2) принадлежат ядру $\tilde{L}^t$, то они имеют n обобщенных производных и в (2), в произведениях $(q_k, \tilde{L}u)$ можно осуществить переброску оператора $\tilde{L}$ на q_k интегрированием по частям. При этом условия (2) примут вид однородных граничных условий

$$u^{(j)}|_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^j(q_k, u)\,|_0^a = 0, \quad j=0, 1, \ldots,\ n-1;$$

здесь $\mathcal{L}^j$ — линейные комбинации значений u и ее производных до порядка $n-1$, взятых в нуле и в a, с коэффициентами, зависящими от соответствующих значений q_k, ω_k и коэффициентов L.

3. П р и м е р. Пусть

$$Lu \equiv D_t u - Au = f, \quad t \in [0, a], \quad D_t \equiv d/dt, \tag{3}$$

где $A=A(t)$ — непрерывная функция и $\int_0^a A(t)\,dt = h$.

Условия (2) примут вид

$$(1+q)u|_0-qe^{-h}u|_a=0. \qquad (4)$$

При произвольном комплексном параметре q равенство (4) дает все граничные условия, при которых 0 не является точкой спектра оператора L_p ($L_0\subset L_p\subset\tilde{L}$). Это находит свое отражение в том обстоятельстве, что, в отличие от ситуации, возникающей при задании граничных условий в виде

$$\mu u|_0-\nu u|_a=0, \qquad (5)$$

явная формула, дающая решение $u=L_p^{-1}f$, выписываемая исходя из условий (4) (см. ниже формулу (6)), не содержит знаменателя. Чтобы связать приведенные рассмотрения с вопросом о спектре, нужно рассуждать следующим образом. При фиксированных μ, ν значение h неособое, если существует постоянная $k\neq0$ такая, что $\mu=k(1+q)$, $\nu=kq\exp(-h)$. Отсюда получаем условие регулярности h в виде $\mu-\nu\exp h\neq0$.

4. Применим теперь наши рассмотрения к случаю, когда в уравнении (3) A является замкнутым линейным оператором (вообще говоря, неограниченным), действующим в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}'$. Предполагается, что $\mathfrak{D}(A)$ плотна в $\mathbf{H}'$. A коммутирует с D_t и обладает полной системой собственных функций, образующих базис Рисса в $\mathbf{H}'$.

Типичный пример интересующих нас операторов A дают нормальные операторы, порождаемые на n-мерном торе замыканием линейных операций с частными производными и постоянными коэффициентами [2].

Естественной областью определения операции L вида (3) будут теперь дифференцируемые по t функции $u(t)$ со значениями в $\mathbf{H}'$, причем $u(t)\in\mathfrak{D}(A)$ при любом $t\in l$. Замыкание в $\mathbf{H}=\mathbf{H}_t\otimes\mathbf{H}'$ (где $\mathbf{H}_t$ — рассмотренное выше пространство $\mathscr{L}^2$ на $[0, a]$) операции L даст t-максимальный оператор, который мы снова обозначим $\tilde{L}$. Замыкание операции L, заданной первоначально на функциях, подчиненных дополнительному условию $u(0)=u(a)=0$, даст t-минимальный оператор L_0. Пусть

$$u=\sum_s u_s(t)\varphi_s, \quad f=\sum_s f_s(t)\varphi_s, \quad s=1,2,\dots,$$

разложение элементов u, $f\in\mathbf{H}$ по собственным функциям (как-либо занумерованным) оператора A с зависящими от t коэффициентами. Пусть u_N, f_N — соответствующие частичные суммы ($s\leqslant N$) и $\hat{L}$ — некоторое разрешимое сужение $\tilde{L}$. Тогда всякое равенство $\hat{L}u_N=f_N$ распадается, в силу сделанных предположений, на цепочку равенств $\hat{L}_{(s)}u_s(t)=f_s(t)$, где $\hat{L}_{(s)}$ — некоторое разрешимое сужение (в $\mathbf{H}_t$) операции $D_tu_s(t)-\lambda_su_s(t)$ ($A\varphi_s=\lambda_s\varphi_s$).

В силу ограниченности оператора $\hat{L}^{-1}$ решение уравнения $\hat{L}u=f$ при любой $f\in\mathbf{H}$ может быть получено предельным переходом $u=\lim\limits_N u_N=$ $=\lim\limits_N\hat{L}^{-1}f_N$ и, следовательно, каждый коэффициент $u_s(t)$ в представлении решения $u=\sum\limits_s u_s(t)\varphi_s$ определяется равенством $u_s=\hat{L}_{(s)}^{-1}f_s$.

Резюмируем приведенные рассуждения.

Предложение 3. *В сделанных предположениях всякое разрешимое сужение $\hat{L}$ определяется набором $\{\hat{L}_{(s)}\}$ разрешимых сужений соответствующих обыкновенных дифференциальных операций. Произвольный набор $\{\hat{L}_{(s)}\}$ определяет разрешимое сужение тогда и только тогда, когда нормы $\hat{L}_{(s)}^{-1}$ в $\mathbf{H}_t$ равномерно по s ограничены.*

Вторая часть утверждения проверяется без труда (ср. [2, 3]).

Для каждого из операторов $\hat{L}_{(s)}$ справедливо, очевидно, предложение 1 и его следствие. Соответствующие рассуждения применимы и к анализу структуры правильных операторов $\tilde{L}\supset L_p\supset L_0$.

Предложение 4. *В сделанных предположениях всякий правильный оператор L_p определяется соответствующим набором правильных операторов $\{L_{p,(s)}\}$. Произвольный набор $\{L_{p,(s)}\}$ определяет правильный оператор тогда и только тогда, когда нормы $L_{p,(s)}^{-1}$ равномерно по s ограничены.*

Используя явный вид элементов $q_{(s)}$, принадлежащих ядру транспонированного оператора $\tilde{L}_{(s)}^{(t)}$ и представимых в виде $\alpha_s \exp(-\bar{\lambda}_s t)$, где α_s — произвольная постоянная, можем записать

$$u_s(t)=\left[\int_0^t (e^{-\tau\lambda_s}+\lambda_s e^{-\tau\lambda_s}) f_s(\tau)\,d\tau+\alpha_s\int_t^a e^{-\tau\lambda_s} f_s(\tau)\,d\tau\right] e^{-\lambda_s t}. \tag{6}$$

Предложение 5. *При выборе $\alpha_s=e^{a\lambda_s}(\mu_s-e^{a\lambda_s})^{-1}$, $|\mu_s-e^{a\lambda_s}|\geqslant\delta$ (равномерно по s) имеет место равномерная по s оценка*

$$\|u_s(t)\|_l\leqslant c(\delta)\,\|f_s(t)\|_l \tag{7}$$

(норма в H_l).

Приведенный выбор α_s сводит доказательство равномерного по s выполнения неравенств (7) к оценкам, приведенным в [2].

Если множество точек $\exp(a\lambda_s)$, где λ принадлежит спектру A, не плотно на комплексной плоскости, то μ_s могут быть выбраны не зависящими от s. В этом случае правильный оператор L_p описывается обычными граничными условиями по t вида $\mu u|_{t=0}-u|_{t=a}=0$.

С другой стороны, проведенные рассуждения показывают, что при «плохом» спектре A для описания правильных операторов неизбежно привлечение граничных условий для $u_s(t)$, зависящих от s. Именно такого типа условия были описаны в [2] с помощью проекционных операторов.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
28 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. Хёрмандер*, К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, М., 1959. [2] *А. А. Дезин*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 31, № 1 (1967). [3] *А. Х. Мамян*, Дифференциальные уравнения, т. 6, № 2 (1970). [4] *Л. Гординг*, Задача Коши для гиперболических уравнений, М., 1961. [5] *М. Нагумо*, Лекции по современной теории уравнений в частных производных, М., 1967.