

В. Г. КОРНЕЕВ

ТЕОРЕМА О ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТЕОРИИ ТОНКИХ
НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

(Представлено академиком В. В. Новожиловым 22 I 1974)

Исследуется система уравнений из (1) для тонкой непологой оболочки. Доказываются положительная определенность дифференциального оператора и неравенства, аналогичные неравенствам Корна в теории упругости. Рассматривается и более широкий класс уравнений, включающих, в частности, анизотропию. Метод исследования отличен от использованных в (2-6), где с аналогичной точки зрения изучались уравнения в частных производных для пологих оболочек и оболочек вращения, и основывается на сопоставлении энергий деформации оболочки и трехмерного линейно-деформируемого тела.

Введем обозначения: S — срединная поверхность оболочки с достаточной гладкой границей Γ ; $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — такая система координат, что $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — система координат — линий кривизн на S , α_3 — взятое с соответствующим знаком расстояние от точки $\bar{\alpha}$ до S ; $i_k(\alpha)$, $k=1, 2, 3$, — подвижный триэдр ортов системы координат $\bar{\alpha}$; $\Omega = \{\bar{\alpha}: \alpha \in S, -0,5h(\alpha) < \alpha_3 < 0,5h(\alpha)\}$, $h(\alpha)$ — толщина оболочки; область, занимаемую оболочкой в евклидовом пространстве E_3 также будем обозначать через Ω ; $i_{k,*}$ — орты декартовой системы координат $x(x_1, x_2, x_3)$ в E_3 ; $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, $\bar{u}_k = \bar{u}_k(\bar{\alpha})$ — перемещение точки $\bar{\alpha}$ в направлении i_k ; $u = (u_1, u_2, u_3)$, $u_k = u_k(\alpha)$ — аналогичное перемещение точки α на S ; $A_k(\alpha)$, $R_k(\alpha)$, $k=1, 2$, — параметры Ляме и главные радиусы кривизны; $E(\alpha)$, $\nu(\alpha)$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; $W_{E, \nu, s}(u, u)$ — потенциальная энергия деформации оболочки, получаемая подстановкой в (9.13) из (1) выражений (4.22) из (1) для деформаций $\epsilon_1, \epsilon_2, \omega, \gamma_1, \gamma_2, \tau$ срединной поверхности через перемещения; $e_{k,l}, k, l=1, 2, 3$, — деформации трехмерного линейно-деформируемого тела в системе криволинейных ортогональных координат $\bar{\alpha}$ (см. выражения (2.11) из (7)); $L_2(S)$, $L_2(\Omega)$, $W_{2,*}^{(1,1,2)}(S)$, $W_2^1(\Omega)$ — нормированные пространства,

$$\|u\|_{L_2(S)}^2 = \int_S |u|^2 ds, \quad \|\bar{u}_*\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\bar{u}_*|^2 dx, \quad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^3 u_k^2,$$

$$\|u\|_{W_2^{(1,1,2)}(S)}^2 = \int_S \left[|u|^2 + \sum_{k=1}^3 |\text{grad}_S u_k|^2 + \sum_{k=1}^2 \left| \text{grad}_S \left[\frac{1}{A_k} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_k} + \frac{u_k}{R_k} \right] \right|^2 \right] ds,$$

$$\|\bar{u}_*\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left[|\bar{u}_*|^2 + \sum_{k,l=1}^3 \left(\frac{\partial \bar{u}_{k,*}}{\partial x_l} \right)^2 \right] dx, \quad |\text{grad}_S u_k|^2 = \sum_{l=1}^2 \left(\frac{1}{A_l} \frac{\partial u_k}{\partial \alpha_l} \right)^2;$$

$H(S)$ — пространство функций и с конечной энергией $W_{E, \nu, s}(u, u)$; $H_{\beta}(S)$, $\beta=1, 2$, — подпространства функций $u \in H(S)$, удовлетворяющих при $\beta=1$

первому краевому условию на Γ (полностью заделанный край), а при $\beta=2$ условиям

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \, dx = 0, \quad \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{u} \, dx = 0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{i}_1 \bar{u}_1 + \mathbf{i}_2 \bar{u}_2 + \mathbf{i}_3 \bar{u}_3, \quad (1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки в E_3 и

$$\bar{u}_k = u_k - \alpha_s \left(\frac{1}{A_k} \frac{\partial u_s}{\partial \alpha_k} - \frac{u_k}{R_k} \right), \quad k=1, 2, \quad \bar{u}_3 = u_3; \quad (2)$$

\mathcal{L}_β , $\beta=1, 2$, — линейные дифференциальные операторы, порождаемые квадратичной формой $W_{E, \nu, s}(u, u)$ на $H_1(S)$ и на подпространстве функций из $H_2(S)$ удовлетворяющих второму краевому условию (свободный от усилий край).

Теорема 1. Пусть h, E, ν, R_k^{-1} — измеримые функции от α , $0 < \mu_1 \leq h$, $E \leq \mu_2$, $0 \leq \nu < 1$, $1 - 0,5hR^{-1} \geq \mu_3 > 0$, $R(\alpha) = \min(|R_1(\alpha)|, |R_2(\alpha)|)$, $\mathbf{a} |A_1^{-1} A_2^{-1} \partial A_k / \partial \alpha_l|$, $k \neq l$, суммируемы по S со степенью $(2+\delta)$, δ — сколь угодно малое, $\delta > 0$.

Тогда операторы \mathcal{L}_β , $\beta=1, 2$, положительно определены и для любой $u \in H_\beta(S)$

$$c_3^{(\beta)} |u|_{W_2^{(1,1,2)}(S)}^2 \geq W_{E, \nu, s}(u, u) \geq \{c_1^{(\beta)} |u|_{L_2(S)}^2, c_2^{(\beta)} |u|_{W_2^{(1,1,2)}(S)}^2\} \quad (3)$$

с постоянными $c_1^{(\beta)}(h, E, \nu, S) > 0$, $c_k^{(\beta)}(h, E, \nu, A_k, \delta, S) > 0$, $k=2, 3$.

Заметим, что для положительной определенности $W_{E, \nu, s}$ и W_s (см. ниже) суммируемости функций $|A_1^{-1} A_2^{-1} \partial A_k / \partial \alpha_l|^{2+\delta}$ не требуется. Сформулируем наиболее важные вспомогательные результаты.

Лемма 1. Если $0 \leq \nu < 1$, $1 - 0,5hR^{-1} \geq \mu_3 > 0$, $u \in H(S)$, \bar{u} определяется по и равенствам (2), $E_* = E(1-\nu)(1+\nu)^{-1}$, $\nu_* = \nu(1+\nu)^{-1}$, то

$$W_{E, \nu, s}(u, u) \geq (1+c_0(1-\mu_3)) W_{E_*, \nu_*, s}(\bar{u}, \bar{u}), \quad c_0 = c_0(\nu, \mu_3) > 0, \quad (4)$$

здесь

$$2W_{E, \nu, s}(\bar{u}, \bar{u}) = \int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\mu) \sum_k e_{h,k}^2 + \sum_{k \neq l} (\lambda e_{h,k} e_{l,l} + 0,5\mu e_{h,l}^2) \right] dx,$$

$$\lambda = E\nu[(1+\nu)(1-\nu)]^{-1}, \quad \mu = 0,5E(1+\nu)^{-1}, \quad k, l=1, 2, 3,$$

u деформация $e_{k,l}$ соответствуют перемещениям \bar{u} .

Заметим, что для справедливости (4) не требуется, чтобы u удовлетворяла каким-либо граничным условиям.

Лемма 2. Пусть \bar{u} и u удовлетворяют соотношениям (2), $\bar{u}_* = (\bar{u}_{1,*}, \bar{u}_{2,*}, \bar{u}_{3,*})$, $\bar{u}_{k,*}$ — проекция вектор-функции $\mathbf{u} = \mathbf{i}_1 \bar{u}_1 + \mathbf{i}_2 \bar{u}_2 + \mathbf{i}_3 \bar{u}_3$ на орты \mathbf{i}_k , * и для h, A_k, R_k^{-1} выполняются условия теоремы 1.

Тогда

$$|\bar{u}_*|_{L_2(\Omega)}^2 \geq \mu_1 \mu_3^2 |u|_{L_2(S)}^2, \quad |\bar{u}_*|_{W_2^{(1,1,2)}(\Omega)}^2 \geq c_1 |u|_{W_2^{(1,1,2)}(S)}^2,$$

причем $c_1 = c_1(h, A_k, \delta, S) > 0$.

В доказательстве леммы используются результаты ⁽⁸⁾. Утверждение теоремы 1 следует из лемм 1, 2 и результатов ⁽⁹⁻¹¹⁾, где доказана положительная определенность дифференциальных операторов и неравенства Корна для ряда краевых задач теории упругости.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \kappa_1, \kappa_2, \tau)$,

$$W_s(u, u) = \int_S W(\varepsilon(u), \varepsilon(u)) \, ds, \quad \mu_4 \varepsilon \cdot \varepsilon \leq W(\varepsilon, \varepsilon) \leq \mu_5 \varepsilon \cdot \varepsilon, \quad \mu_4 > 0,$$

и для h, R_k, A_k выполняются условия теоремы 1.

Тогда для любой $u \in H_p(S)$

$$c_5^{(\beta)} |u|_{W_{2,2}^{(1,1,2)}(S)}^2 \geq W_S(u, u) \geq c_4^{(\beta)} |u|_{W_{2,2}^{(1,1,2)}(S)}^2, \quad (5)$$

$$c_4^{(\beta)} = c_4^{(\beta)}(\mu_3, \mu_4, h, A_h, \delta, S) > 0, \quad c_5^{(\beta)} = c_5^{(\beta)}(\mu_3, \mu_5, h, A_h, \delta, S).$$

Оценки (3), (5), как нетрудно увидеть, можно обобщить на отличные от первой и второй, например, смешанные краевые задачи, на некоторые случаи негладких их составных оболочек. Тот же метод исследования применим к уравнениям теории Рейсснера.

Автор выражает глубокую благодарность акад. В. В. Новожилову за внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
12 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Новожилов, Теория тонких оболочек, Л., 1962. ² И. И. Ворович, ДАН, т. 177, № 2, 203 (1957). ³ И. И. Ворович, А. П. Лебедев, Прикл. матем. и мех., т. 36, в. 4, 691 (1972). ⁴ С. Г. Михлин, Прикл. матем. и мех., т. 16, в. 4, 399 (1952). ⁵ С. Г. Михлин, Численная реализация вариационных методов, М., 1966. ⁶ И. В. Царицына, Вестн. Ленингр. гос. ун-в., т. 19, в. 4, 77 (1972). ⁷ В. В. Новожилов, Теория упругости, Л., 1958. ⁸ С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969. ⁹ K. Friedrichs, Ann. Math., v. 68, № 4, 581 (1946). ¹⁰ Д. М. Эйдуc, ДАН, т. 76, № 2, 181 (1951). ¹¹ Д. М. Эйдуc, Матем. сборн., т. 34, № 3, 429 (1954).