Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 6

УДК 513.53(07)

МАТЕМАТИКА

В. Я. КРЕЙНОВИЧ

К ПРОБЛЕМЕ МЕТРИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком А. Д. Александровым 28 IV 1974)

1. В монографии ([1]) развита теория кинематик, т. е. упорядоченных топологических пространств, в которых множества $Q_a^+=\{x|x>a\}$ и $Q_a^-=\{x|x<a\}$ открыты, $a\in\bar{Q}_a^+\cap\bar{Q}_a^-$ и из $a<b$ следует $\bar{Q}_b^+\subset Q_a^+$. Кинематика называется эйнштейновой, если $\bar{Q}_a^+\cap\bar{Q}_a^-=\{a\}$. Кинематической метрикой τ на кинематике K называется функция τ: $K\times K\to R_0^+$, удовлетворяющая условиям:

МК$_1$. $\tau(a, b)>0\equiv a<b$;

МК$_2$. $a<b<c\supset\tau(a, c)\geqslant\tau(a, b)+\tau(b, c)$.

В ([1]), гл. 2, § 2, доказано, что всякая эйнштейнова сепарабельная кинематика допускает кинематическую метрику; однако полученная метрика оказалась непрерывной только изнутри, т. е. из $a<b$, $a_n\searrow a$ и $b_n\nearrow b$ вытекает $\tau(a_n, b_n)\to\tau(a, b)$. В связи с этим в ([1]) был поставлен вопрос о существовании на таких кинематиках непрерывной кинематической метрики. Мы используем ниже обозначения и определения ([1]).

Теорема 1. *Всякая сепарабельная кинематика $(M, <, T)$ допускает непрерывную кинематическую метрику.*

Доказательство вытекает из серии лемм.

Лемма 1. *Для всякой сепарабельной кинематики $(M, <, T)$ и любой ее точки x существует невозрастающая непрерывная функция f_x: $M\mapsto[0, 1]$ такая, что*

$$\forall a(a<x\equiv f_x(a)>0). \qquad (1)$$

Доказательство. Согласно лемме 6 работы ([1]), гл. 2, § 1, р. 3°, существует монотонно возрастающая последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к x. Согласно же теореме 7, гл. 2, § 1 той же работы ([1]), для всякого n существует неубывающая непрерывная функция f_n: $M\mapsto[0, 1]$ такая, что

$$f_n(Q_{x_{n+1}}^-)=0\;\&\;f_n(M\setminus Q_{x_n}^-)=1.$$

Покажем, что функция

$$f_x(a)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}[1-f_n(a)]$$

является искомой. Из $0\leqslant f_n(a)\leqslant 1$ следует $0\leqslant f_x(a)\leqslant 1$.

Монотонность и непрерывность f_x очевидны. Докажем (1). Если $a<x$, то из $x\in Q_a^+$ и $x_n\to x$ следует, что, начиная с некоторого n, будет $x_n\in Q_a^+$, откуда $a\in Q_{x_n}^-$ и, значит, $f_n(a)=0$ и $f_x(a)\geqslant 2^{-n}[1-f_n(a)]>0$.

Обратно, если $f_x(a)>0$, то для некоторого n будет $2^{-n}[1-f_n(a)]>0$, откуда $f(a)<1$ и, значит, $a\notin M\setminus Q_{x_n}^-$; последовательно $a<x_n<x$ и $a<x$.

Аналогично этой лемме доказывается и

Лемма 2. *Для всякой сепарабельной кинематики $(M, <, T)$ и точки x в ней существует непрерывная неубывающая функция g_x: $M\to[0, 1]$ такая, что $\forall a(a>x\equiv g_x(a)>0)$.*

Лемма 3. *Пусть $x \in M$, f_x и g_x — описанные в леммах 1 и 2 функции и пусть $h_x(a, b) = \min \{f_x(a), g_x(b)\}$. Тогда:*

$$\forall a, b (h_x(a, b) > 0 \equiv a < x < b); \tag{2}$$

$$\forall a, b, c (a < b < c \supset h_x(a, c) \geqslant h_x(a, b) + h_x(b, c)). \tag{3}$$

Доказательство. 1) В силу (1) при любых a, b

$$h_x(a, b) > 0 \equiv (f_x(a) > 0 \,\&\, g_x(b) > 0) \equiv (a < x \,\&\, x < b).$$

2) Неравенство (3) устанавливается перебором всех 4 возможных случаев расположения x относительно интервалов $W_{ab} = Q_a^+ \cap Q_b^-$ и W_{bc}.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{x_i\}_1^\infty$ — всюду плотная в M последовательность. Проверим, что функция

$$\tau(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} h_{x_i}(a, b)$$

является непрерывной кинематической метрикой.

МК$_1$. Если $a < b$, то в непустом открытом множестве W_{ab} найдется точка x_j, тогда $h_{x_j}(a, b) > 0$ и $\tau(a, b) > 0$.

Если $\tau(a, b) > 0$, то $h_{x_i}(a, b) > 0$ для некоторого i и $a < x_i < b$, откуда $a < b$.

МК$_2$ следует из (3).

Непрерывность следует из того, что $0 \leqslant h_{x_i}(a, b) \leqslant f_{x_i}(a) \leqslant 1$ и, значит, τ есть предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Теорема доказана.

Кинематическая метрика, построенная в теореме, вообще говоря, не является внутренней, так как пример кинематики $(R^2, <)$, где $(t, x) > (t', x') \equiv t - t' > |x - x'|^{1/2}$, показывает, что могут существовать точки $a > b$, не соединимые никакой временной; в нашем примере таковыми будут точки $(0, 0) < (2, 1)$.

Для кинематической метрики τ, непрерывной изнутри на кинематике со счетным базисом окрестностей в каждой точке, непрерывность τ эквивалентна непрерывности τ по каждому из аргументов в отдельности, как и для обычной метрики.

2. Если кинематика допускает группу автоморфизмов G, то естественно потребовать, чтобы кинематическая метрика была инвариантна относительно нее. Для конечных групп G и кинематик, удовлетворяющих условиям теоремы 1 (так что существует непрерывная кинематическая метрика τ) достаточно положить

$$\tau'(x, y) = \sum_{g \in G} \tau(gx, gy).$$

Четверку $(M, \cdot, <, T)$, где M — множество, точка означает умножение, $<$ — отношение следования и T — топология на M, назовем группокинематикой, если $(M, \cdot, <)$ — упорядоченная группа, $(M, \cdot, T)$ — топологическая группа и $(M, <, T)$ — кинематика. Как и в случае обычной метрики, назовем кинематическую метрику τ на группокинематике левоинвариантной, если $\forall a, b, c (\tau(ca, cb) = \tau(a, b))$, соответственно правоинвариантной и инвариантной.

Напомним, что кинематика называется интервально-компактной, если каждый замкнутый интервал в ней компактен.

Теорема 2. *Всякая сепарабельная интервально-компактная эйнштейнова группокинематика G допускает левоинвариантную кинематическую метрику.*

Доказательство. Пусть μ — (левоинвариантная) мера Хаара на G, $\{x_i\}_1^\infty$ — всюду плотная в G последовательность; пусть $\bar{A}$ — замыкание, ∂A — граница множества A.

Лемма 1. $\forall a, b\,(a>b \supset \mu(\partial Q_a^- \cap Q_b^+)=0)$.

Доказательство. Пусть $c>e$. Тогда в силу интервальной компактности и свойств μ

$$0 \leqslant \mu(\overline{W}_{c^{-3},\, c^3}) < +\infty. \tag{4}$$

Положим $a_0=c^2$ и при $k\geqslant 0$ возьмем $a_{k+1}\in W_{e,\,a_k}$. Тогда в силу определения кинематики множества $A_i=\partial Q_{a_i}^- \cap Q_{a_i c^{-1}}^+$ дизъюнктны, и в силу левоинвариантности меры и следования $\forall i(\mu A_i=\mu(\partial Q_c^- \cap Q_e^+)=r)$. Из $r>0$ следовало бы

$$\mu(\overline{W}_{c^{-3},c^3}) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i = \infty \cdot r = +\infty,$$

что противоречит (4). Значит, $r=0$.

Если $a>b$, то $b^{-1}a>e$ и в силу инвариантности меры и следования

$$\mu(\partial Q_a^- \cap Q_b^+) = \mu(\partial \overline{Q}_{b^{-1}a} \cap Q_e^+) = 0.$$

Лемма 2. $\forall a(\mu(\partial Q_a^+)=\mu(\partial Q_a^-)=0)$.

Доказательство. Пусть $z\in\partial Q_a^-$. Так как Q_z^- открыто и непусто, то найдется i такое, что $x_i<z$ и, значит, $z\in\partial Q_a^- \cap Q_{x_i}^+$. Следовательно,

$$\partial Q_a^- = \bigcup_{\{i|x_i<a\}} (\partial Q_a^- \cap Q_{x_i}^+),$$

откуда в силу леммы 1 и аддитивности μ получаем $\mu(\partial Q_a^-)=0$. Аналогично $\forall a(\mu(\partial Q_a^+)=0$.

Следствие. $\forall a, b\,(\mu(W_{ab}^0)=\mu(\{x|a\leqslant x\leqslant b\})$, *где* $W_{ab}^0=\{x|a<x<b\}$ *и* $b\leqslant a \equiv a\in\overline{Q}_b^+$.

Проверим теперь, что функция $\tau(a, b)=\mu(W_{ba}^0)$ искомая.

МК$_1$. Так как W_{ab}^0 открыто для любых a, b, то по свойствам μ

$$\tau(b, a)>0 \equiv W_{ab}^0 = \varnothing \equiv a<b.$$

МК$_2$. Если $a<b<c$, то $W_{ab}^0 \cap W_{bc}^0=\varnothing$ и $W_{ab}^0 \cup W_{bc}^0 \subset W_{ac}^0$. Значит, $\tau(c, a)\geqslant \tau(c, b)+\tau(b, a)$.

Непрерывность. Пусть $a_n\to a$ и $b_n\to b$. Если $a<z<b$, то $a\in Q_z^-$, $b\in Q_z^+$ и, значит, начиная с некоторого n, $a_n<z<b_n$, откуда

$$W_{ab}^0 \subset \liminf W_{a_n b_n}^0. \tag{5}$$

Если $a \nless b$, то $W_{ab}^0=\varnothing$ и (5) также справедливо.

Если теперь $z\in\limsup W_{a_n b_n}^0$, то $\forall n \exists k_n (k_n>n \,\&\, a_{k_n}<z<b_{k_n})$ и при $n\to\infty$ получим $a\leqslant z\leqslant b$. Значит, $\limsup W_{a_n b_n}^0 \subset \{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

Пользуясь σ-аддитивностью и следствием к лемме 2, получаем

$$\tau(b,a)=\mu(W_{ab}^0)\leqslant \mu(\liminf W_{a_n b_n}^0)\leqslant \liminf \tau(b_n, a_n)\leqslant \limsup \tau(b_n, a_n)\leqslant$$

$$\leqslant \mu(\limsup W_{a_n b_n}^0)\leqslant \mu(\{x|a\leqslant x\leqslant b\})=\mu(W_{ab}^0),$$

откуда $\tau(b, a)=\lim\limits_n \tau(b_n, a_n)$. Левоинвариантность τ следует теперь из левоинвариантности μ. Теорема доказана.

Следствие. *Всякая сепарабельная интервально-компактная эйнштейнова группокинематика, подлежащая группа которой унимодулярна (в частности, абелева) допускает инвариантную непрерывную кинематическую метрику.*

Наиболее интересным примером группокинематик являются объекты, изучаемые А. Д. Александровым ([3]), где топологической группой служит группа аффинных переносов E_n. Для таких групп условие интервальной компактности по существу излишне. Действительно, имеет место

Предложение. *Для всякой группокинематики с подлежащей группой E_n, в которой внутренность конуса содержит полупрямую, существуют разложение $E_n = E_1 \oplus E_{n-1}$ и непрерывная функция f: $E_{n-1} \to [0, +\infty)$ такие, что*:

1) $(t, x) > 0 \equiv t > f(x)$;
2) $\forall x, y (f(x+y) \leqslant f(x) + f(y))$;
3) $f(0) = 0$.

Для таких кинематик искомой метрикой является

$$\tau((t_1, x_1), (t_2, x_2)) = \begin{cases} [(t_1-t_2)^2 - f^2(x_1-x_2)]^{1/2} & \text{при } (t_1, x_1) > (t_2, x_2), \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

В общем же случае условие интервальной компактности нельзя опустить, например, группа $Q \oplus Q$ с лексикографическим порядком и интервальной топологией не допускает инвариантной кинематической метрики.

3. Методы, аналогичные примененным в теореме 1, позволяют решить и поставленный Р. И. Пименовым вопрос о возможности введения на кинематике обычной метрики.

Теорема 3. *На всякой сепарабельной эйнштейновой кинематике K существует непрерывная метрика ρ такая, что порожденная ею топология совпадает с интервальной и кинематическое отношение «между» — с метрическим, т. е.*

$$\forall p, q, r (p \neq q \neq r \supset (\rho(p, r) = \rho(p, q) + \rho(q, r) \equiv$$
$$\equiv (p \geqslant q \geqslant r \vee p \leqslant q \leqslant r))).$$

Следствие. *Следующие условия эквивалентны для всякой интервально-компактной сепарабельной эйнштейновой кинематики*:

а) *любые $a \geqslant b$ соединимы направленной кривой*;

б) $\forall a, b (a \overset{\geqslant}{\neq} b \supset \exists c (c \neq a \,\&\, c \neq b \,\&\, a \geqslant c \geqslant b))$.

Автор благодарен Р. И. Пименову за постановку задач, непрерывное внимание к работе и ценные замечания, акад. А. Д. Александрову за полезные обсуждения, а также администрации математико-механического факультета Ленинградского университета за создание условий, обеспечивших работу автора над этой тематикой.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
3 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Р. И. Пименов,* Пространства кинематического типа, 1968. [2] *Н. Бурбаки,* Интегрирование. Векторное интегрирование, 1970. [3] *А. Д. Александров,* Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 128 3 (1972).