Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 6

УДК 550.388.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Л. КРЫЛОВ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ТОКОВЫЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ В ВЫСОКОШИРОТНОЙ ИОНОСФЕРЕ

(Представлено академиком М. А. Садовским 27 XII 1973)

1. Как было показано в [5] (см. также [2–4]) потенциал электрического поля Φ и функция тока Ψ в нулевом приближении по параметру $\sigma_\perp/\sigma_\parallel \ll 1$ удовлетворяют системе

$$\operatorname{Rot}\Psi = -\hat{S}\operatorname{Grad}\Phi + J_0,$$

где $\hat{S}$ — тензор интегральной вдоль силовой линии (с.л.) проводимости на базе $D=(x^1, x^2)$, а J_0 — внешний интегральный ток на базе.

В высоких широтах $\Lambda \geqslant \pi/3$ (Λ — геомагнитная широта) магнитные с.л. на протяжении проводящей ионосферы пересекают ее почти ортогонально. Принимая также, что проводимости σ_α, $\alpha=1, 2$, мало зависят от Λ, φ (во всяком случае эта зависимость гораздо слабее, чем в низких широтах и особенно на терминаторе) и что в рассматриваемой нами области нет быстрых частиц ($J_0=0$), мы приходим к системе с постоянными коэффициентами

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \Psi}{\partial x^2} = -\left(\Sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} + \Sigma_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}\right), \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x^1} = -\Sigma_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} + \Sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x^2},
\end{gathered} \tag{1}$$

где x^1, x^2 — декартовы координаты с началом на полюсе, Σ_1, Σ_2 — интегральные педерсеновская и холловская проводимости соответственно.

Система (1) имеет место всюду (в высоких широтах), кроме проекции Γ на базу границы S_b (см. [1, 5]). Эта проекция, если в качестве базы взята, как выше, верхняя полусфера Земли, является замкнутой кривой, охватывающей полюс, и называется овалом полярных сияний.

На Γ решение (1) имеет разрыв, определяемый из условий проникновения частиц из переходной зоны через S_b в магнитосферу. В настоящее время эти условия известны мало и мы ограничимся исследованием общего решения (1), имеющего наиболее общий разрыв на Γ и убывающего при $(x^1)^2+(x^2)^2 \to \infty$ (т. е. вне высокоширотной зоны).

2. Для изучения (1) удобно ввести отдельно функции педерсеновского и холловского токов равенствами

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2,$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \Psi_1}{\partial x^2} = -\Sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial x^2} = -\Sigma_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \\
\frac{\partial \Psi_1}{\partial x^1} = \Sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial x^1} = -\Sigma_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}.
\end{gathered} \tag{2}$$

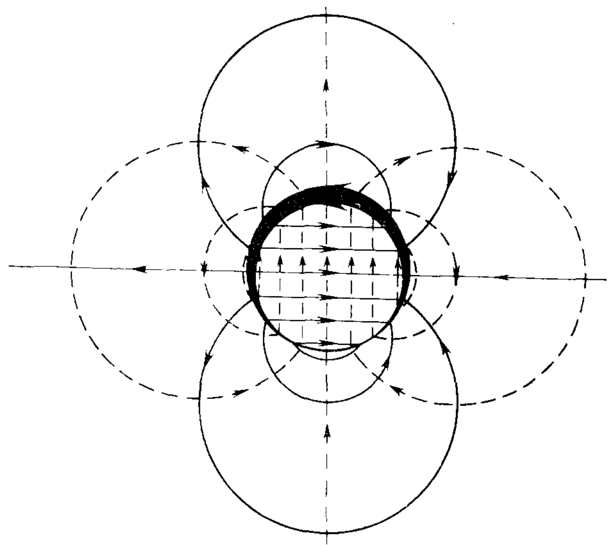

Рис. 1

Из (3), очевидно, следует, что существует аналитическая функция $w(z)$ переменной $z=x^1+ix^2$ такая, что

$$w(z)=\Phi+i\frac{1}{\Sigma_1}\Psi_1,\qquad \Psi_2=-\Phi.$$

Тогда, в силу сказанного в конце п. 1, математическая задача состоит в отыскании общего решения следующей задачи: найти аналитическую функцию, имеющую на Г заданный (комплексный) скачок $[w]=h(\zeta)=$ $=f(\zeta)+ig(\zeta)$, $\zeta\in\Gamma$, убывающую при $z\to\infty$.

Решение этой задачи выписывается явно ([6]):

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\zeta. \tag{3}$$

Например, при $h(\zeta)=C\zeta^n$ $w(z)=Cz^{\pm n}$ соответственно внутри и снаружи Г. При $\Gamma=\{|z|=1\}$ наиболее просто считаются два важнейших случая — когда скачок мнимый и чисто вещественный (они содержатся в предыдущей формуле при $C=1$ и $C=i$). Математические решения, разумеется, совершенно идентичны, однако их физический смысл весьма различен.

3. Рассмотрим вначале случай $[\Phi]=0$, $[\Psi]=2\sin n\varphi$. Имеем очевидное решение ($n>0$)

$$w_n(z)=\begin{cases} z^n, & |z|<1,\\ z^{-n}, & |z|>1.\end{cases} \tag{4}$$

Потенциал Φ непрерывен, а педерсеновский ток Ψ_1 имеет на Г разрыв, который должен быть скомпенсирован соответствующим вертикальным током, проходящим вдоль с.л., исходящих из Г, т.е. током, текущим вдоль S_h. Нормальная компонента электрического поля при этом имеет на Г тот же разрыв, что нормальная компонента педерсеновского тока (с точностью до множителя Σ_1). Холловский ток Ψ_2, пропорциональный Φ, непрерывен на Г.

Заметим, что в предположениях вмороженности плазмы имеем для ее массовой скорости v известное выражение

$$v=c\frac{E\times B}{B^2},$$

откуда следует, что линии конвекции совпадают с линиями $\Phi=\mathrm{const}$. Можно показать, что линии эквивалентного тока (т.е. плоского тока в ионосфере, порождающего наземные магнитные вариации), совпадают с линиями $\Psi_2=\mathrm{const}$ ([1], [7]). Таким образом, линии уровня вещественной и мнимой частей (4) совпадают соответственно с линиями конвекции и линиями эквивалентного тока. В частности, последние для $n=1$ (рис. 1, пунктир) дают картину, близкую к DP-2 вариациям ([8]).

4. При $[\Psi_1]=0$, $[\Phi]=2\sin n\varphi$ имеем

$$w_n(z)=\begin{cases}-iz^n, & |z|<1,\\ -iz^{-n}, & |z|>1; \quad n>0;\end{cases} \tag{5}$$

$$w_0(z)=\begin{cases}1, & |z|<1,\\ 0, & |z|>1; \quad [\Phi]=1.\end{cases} \tag{6}$$

Физически этот случай менее нагляден, чем предыдущий, так как на Г возникает «большое» электрическое поле. Этот скачок Φ объясняется тем, что в одну точку Г приходят две с.л. из совсем разных точек S_b (подробнее см. ([1], [5])). Вместе с Φ на Г «рвется» и холловский ток Ψ_2, который, однако, в отличие от педерсеновского тока из п. 3, замыкается не вертикальным током, а токовой струей вдоль Г. Педерсеновский ток Ψ_1 в этом случае непрерывен, однако из рассмотрения «тонкой» структуры струи внутри Г следует, что в этом случае он связан с вертикальным током двойного слоя, текущего вдоль с.л., исходящих из Г и приходящих в S_b. Как и в п. 3, вклад в эквивалентный ток вносит только холловский ток Ψ_2, который для случая линейной комбинации (5) и (6) дает картину (рис. 1: $w=w_0+w_1$, сплошные линии), близкую к DP-1 вариациям и авроральной токовой струе ([8]).

Более подробное обсуждение физического аспекта, а также выражения для вертикальных токов содержатся в ([1]). Таким образом, рассмотренная математическая модель описывает DP-1 и DP-2 токовые системы высокоширотной области, в том числе авроральную струю. Описание имеет полуфеноменологический характер, при этом предполагается известным разрыв Φ и Ψ_1 на полярном овале Г.

Автор благодарит А. В. Гуревича за постановку задачи и указание решения типа DP-2.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
16 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. В. Гуревич, А. Л. Крылов*, Геомагнетизм и аэрономия, т. 14, № 2 (1974). [2] *А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина*, там же, т. 9, 458 (1969). [3] *А. Л. Крылов, В. П. Щербаков*, там же, т. 12, № 2, 218 (1972). [4] *А. В. Гуревич, А. Л. Крылов и др.*, Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, в. 25 (1972). [5] *А. Л. Крылов*, ДАН, 218, № 5 (1974). [6] *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат*, Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», 1973. [7] *N. Fukushima*, Plan. Space Sci., v. 20, 1445 (1972). [8] *Т. Обаяши*, Сборн. Солнечно-земная физика, М., 1968.