Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 1

УДК 548.1 *КРИСТАЛЛОГРАФИЯ*

Член-корреспондент АН СССР Б. Н. ДЕЛОНЕ, М. И. ШТОГРИН

УПРОЩЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ШЕНФЛИСА

Начиная с Фробениуса ([4]), многие занимались упрощением доказательства трехмерной теоремы Шенфлиса ([1]) и n-мерной теоремы Бибербаха ([3]), так как эти теоремы являются основными в любом изложении геометрической кристаллографии. Последний успех в направлении теоремы Бибербаха принадлежит Э. Б. Винбергу. Но и его доказательство даже в случае $n=3$ несколько сложно для кристаллографов. Одна из деталей доказательства Э. Б. Винберга привела нас к излагаемому ниже более простому доказательству теоремы Шенфлиса.

Группа G движений трехмерного эвклидова пространства называется федоровской, если она удовлетворяет следующим двум условиям: 1) дискретности относительно хотя бы одной точки пространства, т. е. существованию точки A, обладающей шаром с центром в A и определенным (положительным) радиусом r, внутри которого нет других точек, G-эквивалентных точке A, кроме нее самой, и 2) однородности, т. е. существованию такого шара определенного радиуса R, что любая точка пространства движением из G может быть перемещена внутрь него, где бы его ни взять.

Требуется доказать, что только из r, R-свойств G следует, что в G есть трехмерная подгруппа параллельных переносов.

Сделаем сначала два замечания.

Замечание 1. Внутри сферы радиуса $r/2$, проходящей через точку A, нет G-образов точки A, и поэтому $R>r/2$, т. е. $r/(4R)<{}^1/_2$.

Замечание 2. Группа G_A всех движений из G, преобразующих точку A в себя, конечна. Действительно, внутри сферы R, проходящей через точку A, есть ее G-образ A', а внутри сферы R, касающейся в A прямой AA', есть другой ее G-образ A''. Векторы AA' и AA'', очевидно, не коллинеарны. В силу r-дискретности A «двуног» $AA'A''$ после всех поворотов G_A может принимать лишь конечное число различных положений.

Для всякого движения 1-го рода вообще — тождественного движения, параллельного переноса, поворота вокруг оси или винтового движения — его поворотная часть (см. ([2])) является либо тождественной (поворотом на угол 0) — для первых двух, либо поворотом вокруг обыкновенной оси на некоторый угол $0<\varphi\leqslant\pi$ в ту или иную сторону — для двух последних. Докажем основную теорему.

Теорема. *Углы φ (в радианах) всех отличных от тождественной поворотных частей движений 1-го рода федоровской группы G больше $r/(4R)$.*

Доказательство. Пусть φ — угол поворота какой-либо обыкновенной оси a из G. Внутри шара R, касающегося оси a, есть G-образ A' точки A. Точка A' удалена от a на расстояние $0<\rho<2R$. При повороте вокруг a на угол, который не превышал бы $r/(2R)$ (<1), точка A' по окружности ρ перешла бы от своего исходного положения на расстояние, меньшее r, что противоречило бы r-дискретности A'. Поэтому $\varphi>r/(2R)$ $(>r/(4R))$.

Пусть теперь φ — угол поворота какого-либо винтового движения u из G. Рассмотрим шар R, касающийся оси u. Внутри него есть G-образ $\tilde{M}$ произвольной точки M оси u. Следовательно, этот шар R пронизывает ось $\tilde{u}$, G-эквивалентная оси u.

Предположим сначала, что оси винтовых движений u и $\tilde{u}$ параллельны. Расстояние d между ними, очевидно, меньше $2R$. Рассмотрим то из произведений $u\tilde{u}$ или $u\tilde{u}^{-1}$, в котором переносы вдоль осей компенсируются. Если повороты сомножителей окажутся в одну сторону, то это произведение будет поворотом вокруг обыкновенной оси на угол 2φ, который в силу предыдущего больше $r/(2R)$, и поэтому $\varphi > r/(4R)$. Если же повороты окажутся в разные стороны, то произойдет параллельный перенос на расстояние $2d \sin {}^1/_2\varphi$ и из $r \leqslant 2d \sin {}^1/_2\varphi < 2R\varphi$ мы получим $\varphi > r/(2R)$ $(> r/(4R))$.

Для завершения доказательства теоремы осталось рассмотреть случай, когда оси u и $\tilde{u}$ непараллельны. Доказательство для этого случая будем вести от противного, предполагая, что $\varphi \leqslant r/(4R)$.

При движениях u и $\tilde{u}$ точка A перейдет в некоторые точки A' и $\tilde{A}'$, находящиеся в шаре с центром в A и некоторым определенным радиусом σ. Шар σ в силу r-дискретности A содержит лишь конечное число точек, G-эквивалентных A. Ввиду этого и замечания 2 в группе G есть лишь конечное число движений Σ, при которых G-образы точки A лежат в шаре σ. Пусть v — то из движений 1-го рода среди этих движений Σ, которое имеет наименьший ненулевой угол поворота ψ. Движение v переводит A в некоторую точку $\bar{A}$ из шара σ. Очевидно, $\psi \leqslant \varphi$. Ось поворота v не параллельна хотя бы одной из осей u или $\tilde{u}$. Для определенности, ниже будем считать, что непараллельны именно оси u и v.

Рассмотрим теперь движение * I-го рода w из группы G, получающееся при умножении следующих четырех ее движений:

1) Движение u. Точка A перейдет в A', $\bar{A}$ — в некоторую точку A'', а движение v — в некоторое движение v', переводящее A' в A''.

2) Движение v'. Точка A' перейдет в A'', A — в некоторую точку A''', а движение u — в некоторое движение u', переводящее A''' в A''.

3) Движение u'^{-1}. Точка A'' перейдет в A''', A' — в некоторую точку A^{IV}, а движение v' — в некоторое движение v'', переводящее A^{IV} в A'''.

4) Движение v''^{-1}. Точка A''' перейдет в точку A^{IV}.

При движении $w = uv'u'^{-1}v''^{-1}$ точка A перейдет в точку A^{IV} по, вообще говоря, неплоской, векторной ломаной $AA'A''A'''A^{IV}$. Рассмотрим (плоский) параллелограмм $A'A''A'''B$ (рис. 1). Отрезок $A'B$ повернут относительно $A'A$ поворотом v' (т. е. поворотной частью движения v') и поэтому угол $\beta \leqslant \psi$. Учитывая, что $\psi \leqslant \varphi \leqslant r/(4R) < {}^1/_2$ (см. замечание 1) и $A'B = AA' < \sigma$, получаем $AB < \sigma/2$. Из $\Delta BA'''A^{IV}$ аналогично получаем $BA^{IV} < \sigma/2$. Следовательно, $AA^{IV} \leqslant AB + BA^{IV} < \sigma$, т. е. движение w содержится среди упомянутых выше движений Σ.

Учитывая, что при умножении движений их поворотные части (если их производить вокруг одной и той же точки O) умножаются отдельно, займемся исследованием угла θ поворотной части движения w.

Пусть P и Q — две ближайшие одна к другой точки пересечения осей поворотов u и v со сферой радиуса 1 с центром в точке O, через которую проведены оси этих поворотов. Поворот u оставит точку P на месте, а точку Q переведет в новое положение Q'. Поворот v' оставит Q' на месте и переведет P в новое положение P'. Поворот u'^{-1} оставит P' на месте и переведет Q' в новое положение Q'', но не обратно на место Q. (Если бы $Q'' = Q$, то из симметрии «ромба» $QPQ'P'$ на сфере следовало бы, что при повороте u'^{-1}, как и при повороте u, точка Q переходила бы в Q', т. е. что ось u'^{-1} имела бы порядок 2; но это противоречило бы тому, что $\varphi \leqslant r/(4R)$.) Поворот v''^{-1} оставит Q'' на месте. В итоге поворот w переведет Q в новое положение Q'' и поэтому $\theta \neq 0$.

---

* В рассмотрении этого движения вся суть соображения Шенфлиса ([1]).

Пусть теперь M — произвольная точка рассматриваемой единичной сферы. При повороте w точка M перейдет в точку M^{IV} по некоторой ломаной $MM'M''M'''M^{\mathrm{IV}}$ (рис. 2). Радиус OM' повернут относительно OM на угол, не превышающий угла φ поворота u и поэтому $MM'\leqslant 2\sin{}^1/_2\varphi$. Рассмотрим параллелограмм $M'M''M'''N$. Его сторона $M'N$ повернута относительно хорды $M'M$ на угол, не превышающий угла ψ поворота v', и поэтому $MN\leqslant 4\sin{}^1/_2\varphi\sin{}^1/_2\psi$. Из $\Delta NM'''M^{\mathrm{IV}}$ — аналогично получаем $NM^{\mathrm{IV}}\leqslant 4\sin{}^1/_2\varphi\sin{}^1/_2\psi$. Следовательно, $MM^{\mathrm{IV}}\leqslant 8\sin{}^1/_2\varphi\sin{}^1/_2\psi$. Учитывая, что $4\sin{}^1/_2\varphi<2\varphi\leqslant r/(2R)<1$, мы имеем $MM^{\mathrm{IV}}<2\sin{}^1/_2\psi$. Если радиус OM перпендикулярен оси w (т. е. $MM^{\mathrm{IV}}=2\sin{}^1/_2\theta$), то из этого неравенства получаем, что угол $\theta<\psi$.

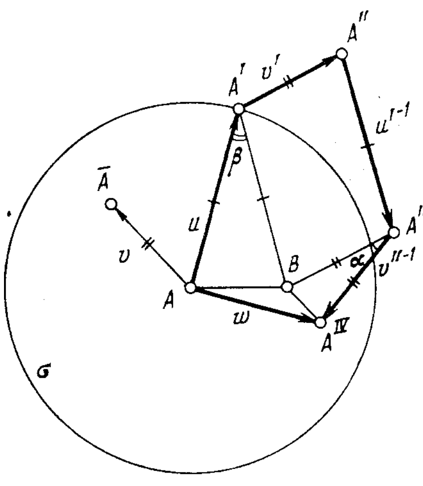

Рис. 1

Итак, предполагая, что $\varphi\leqslant r/(4R)$, мы построили движение I-го рода w, содержащееся в числе движений Σ и обладающее ненулевым углом поворота θ меньшим, чем ψ. Получилось противоречие. Следовательно, неравенство $\varphi\leqslant r/(4R)$ невозможно. Теорема доказана.

Следствие 1. *Группа Φ всех поворотных частей движений произвольной трехмерной федоровской группы G конечна.*

Действительно, группа Φ_1 всех поворотов I-го рода группы Φ, очевидно, либо совпадает с Φ, либо является ее подгруппой индекса 2. Порядки всех осей группы Φ_1 конечны и все они меньше $8\pi R/r$, так как в противном случае имелась бы ось группы Φ_1 с углом поворота, не превышающим $r/(4R)$, что противоречило бы доказанной теореме. Поэтому, если бы группа Φ_1 все же была бесконечной, то в ней имелось бы бесконечно много осей какого-либо одного из этих порядков. Но тогда имелись бы оси одного и того же порядка, угол между которыми сколь угодно мал, и произведение поворотов вокруг них на одинаковые углы в «разные стороны» было бы поворотом на сколь угодно малый угол, что опять противоречило бы теореме.

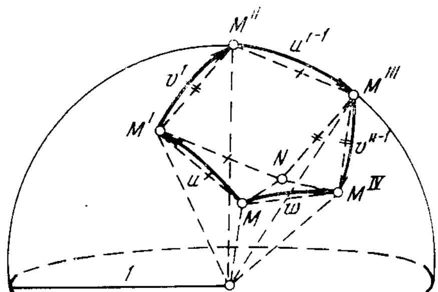

Рис. 2

Следствие 2. *В любой трехмерной федоровской группе G имеется трехмерная подгруппа параллельных переносов.*

В силу следствия 1 группа Φ имеет определенный конечный порядок h. Рассмотрим какой-нибудь набор h G-образов точки A, обладающих всеми возможными h различными повернутостями. Пусть $\mathfrak{R}$ — радиус шара, внутри которого содержится этот набор. Тогда внутри шара радиуса $R+\mathfrak{R}$ с центром уже в любой точке M пространства опять содержится такой набор (так как центр C исходного шара $\mathfrak{R}$ движением из G можно переместить внутрь шара R с центром в M, а при этом движении набор, содержащийся в исходном шаре $\mathfrak{R}$, перейдет опять в набор, но уже содержащийся в шаре $R+\mathfrak{R}$ с центром в M).

Рассмотрим теперь сферу $R+\mathfrak{R}$, проходящую через точку A. Внутри нее содержатся G-образы точки A любых h повернутостей, а значит, имеется точка A_1, получаемая из A параллельным переносом из группы G. Другая такая точка A_2 имеется внутри сферы $R+\mathfrak{R}$, касающейся в точке A прямой

AA_1, а третья A_3 — внутри сферы $R+\mathfrak{R}$, касающейся в точке A к плоскости AA_1A_2. Параллельные переносы AA_1, AA_2, AA_3 некомпланарны.

Примечание при корректуре. В определении федоровской группы математики обычно требуют компактности (конечности) ее фундаментальной области. В таком случае любой отрезок, больший диаметра этой области, очевидно, может быть принят за радиус однородности R.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
15 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *A. Schönflies,* Kristallsysteme und Kristallstruktur, Leipzig, 1891. [2] *Б. Делоне, Н. Падуров, А. Александров,* Математические основы структурного анализа кристаллов, Л.— М., 1934. [3] *L. Bieberbach,* Math. Ann., B. 70, 297 (1911). [4] *G. Frobenius* Sitz, König. Preus. Acad. Wissenschaften, Berlin, 1911, S. 654.