

УДК 532.591

ГИДРОМЕХАНИКА

А. П. ЛЕОНОВ, Ю. З. МИРОПОЛЬСКИЙ

**ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ
ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ**

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 22 XI 1973)

Большинство работ, посвященных исследованию установившихся внутренних гравитационных волн конечной амплитуды в устойчиво стратифицированной жидкости (¹⁻⁶), основывалось на уравнении, выведенном Лонгом (¹). Однако уравнение Лонга содержит две произвольные неизвестные функции, что существенно осложняет исследование. Измеряемым внешним параметром при расчетах внутренних волн как в атмосфере, так и в океане является профиль невозмущенной частоты Вайсяля — Брента. В настоящей работе получено уравнение, содержащее в качестве внешнего параметра только частоту Вайсяля — Брента, и приводится его решение в приближении слабой нелинейности и дисперсии.

1. Будем рассматривать двумерные установившиеся внутренние волны, т. е. предполагать, что

$$\Psi = \Psi(\Theta, z), \quad \rho = \rho(\Theta, z), \quad \Theta = x - vt, \quad (1)$$

где Ψ — функция тока в волне, ρ — плотность, x, z — горизонтальная и вертикальная координаты (положительное направление оси z вверх), v — скорость распространения волны. Тогда уравнения гидродинамики сводятся к одному уравнению для Ψ (^{1, 4}):

$$\Delta\Psi + \varphi'(\Psi - vz) \left[\frac{1}{2}(\partial\Psi/\partial\Theta)^2 + \frac{1}{2}(\partial\Psi/\partial z - v)^2 + gz \right] = \Phi'(\Psi - vz), \quad (2)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial\Theta^2 + \partial^2/\partial z^2$, g — ускорение силы тяжести, а $\Phi(\Psi - vz)$ и $\varphi(\Psi - vz) = \ln \rho(\Psi - vz)$ — произвольные неизвестные функции, штрих обозначает дифференцирование по аргументу $\Psi - vz$.

Заменим аргумент $\Psi - vz$ у функций φ и Φ в (2) на $S = z - \Psi/v$, тогда вместо (2) получим

$$\Delta\Psi - \frac{1}{v} \frac{d\varphi}{dS} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\Theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} - v \right)^2 + gz \right] = - \frac{1}{v} \frac{d\Phi}{dS}. \quad (3)$$

Из (2), (3) следует, что в общем случае завихренность внутренних волн может быть обусловлена помимо стратификации также и внешними причинами (наличие среднего течения со сдвигом скорости, непотенциальные внешние силы и т. д.).

Будем рассматривать только свободные внутренние волны, распространяющиеся в покоящейся жидкости. Тогда единственным источником завихренности будет стратификация. При этом естественно требование, чтобы (3) в качестве предельного случая ($\Psi \rightarrow 0$) содержало уравнение линейной теории, которое обладает свойством однородности, т. е. существованием тривиального решения $\Psi \equiv 0$. Кроме того скорость распространения v можно считать фиксированной.

Переходя в (3) к пределу при $\Psi \rightarrow 0$, получим

$$d\Phi/dz = \left[\frac{1}{2}v^2 + gz \right] d\varphi/dz. \quad (4)$$

Если вместо $\varphi'(z)$ ввести (определенную в линейной теории) частоту Вайселя — Брента

$$N^2(z) = -g\varphi'(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}, \quad \rho_0(z) = \lim_{\Psi \rightarrow 0} \rho\left(z - \frac{\Psi}{v}\right), \quad (5)$$

затем в (4), (5) заменить z на $S = z - \Psi/v$ и подставить эти выражения в (3), получим

$$\Delta\Psi + \left\{ \frac{\Psi}{v^2} + \frac{1}{2vg} \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\Theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} - v \right)^2 - v^2 \right] \right\} N^2\left(z - \frac{\Psi}{v}\right) = 0. \quad (6)$$

Это основное уравнение, описывающее нелинейные установившиеся внутренние волны в покоящейся жидкости. Оно не содержит неизвестных произвольных функций, так как величина $N^2(z)$ и, что то же, $N^2(z - \Psi/v)$, определяется априори условиями задачи. При использовании приближения Буссинеска, как нетрудно показать, члены в квадратных скобках (6) обращаются в нуль. Определение точного решения (6) (за исключением случая $N^2 = \text{const}$ в приближении Буссинеска) представляется затруднительным. Далее рассмотрим приближение слабой дисперсии и нелинейности.

2. Введем безразмерные переменные $\xi = \Theta\lambda^{-1}$, $\eta = zH^{-1}$, $F = \Psi(Hv)^{-1}$, где λ — длина волны, а H — глубина жидкости. Тогда (6) будет иметь вид

$$\varepsilon \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \left\{ \beta F + \frac{\mu}{2} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 - 2 \frac{\partial F}{\partial \eta} \right] \right\} \Omega(\eta - F) = 0; \quad (7)$$

здесь введены безразмерные параметры $\Omega(\eta - F) = N^2(\eta - F)(N_0^2)^{-1}$, $\varepsilon = H^2/\lambda^2$, $\beta = H^2 N_0^2/v^2$, $\mu = HN_0^2/g$, где $N_0^2 = \text{const}$ — максимальное значение частоты Вайселя — Брента, причем $0 \leq \Omega \leq 1$, а параметр μ характеризует отличие от приближения Буссинеска.

Для уравнения (7) естественными граничными условиями являются условия непротекания на твердой стенке (дне). Далее, поскольку нас не интересуют поверхностные волны, примем, что на поверхности ($\eta = 0$) вертикальная скорость также обращается в нуль, т. е.

$$\partial F / \partial \xi |_{\eta=0} = \partial F / \partial \xi |_{\eta=-1} = 0. \quad (8)$$

Будем рассматривать случай длинных волн, т. е. полагать, что $\varepsilon \ll 1$. Тогда решение (7), (8) можно искать в виде

$$F = \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots, \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + \dots \quad (9)$$

(β — собственное число нелинейной краевой задачи (7), (8)).

Подставляя (9) в (7), (8), получим

$$F_1'' - \mu \Omega F_1' + \beta_0 \Omega F_1 = 0, \quad F_2'' - \mu \Omega F_2' + \beta_0 \Omega F_2 = L, \quad (10)$$

$$L = -\left\{ \partial^2 F_1 / \partial \xi^2 + \beta_1 \Omega F_1 - \beta_0 \Omega' F_1^2 + \mu \Omega' F_1' F_1 + \frac{1}{2} \mu \Omega (F_1')^2 \right\}, \quad (11)$$

$$\partial F_i / \partial \xi |_{\eta=0} = \partial F_i / \partial \xi |_{\eta=-1} = 0 \quad (12)$$

(штрих обозначает дифференцирование по η , $\Omega \equiv \Omega(\eta)$).

Первое уравнение (10) допускает решение вида

$$F_1(\xi, \eta) = W(\eta)U(\xi), \quad (13)$$

где $W(\eta)$ находится из решения краевой задачи

$$W'' - \mu \Omega W' + \beta_0 \Omega W = 0, \quad W|_{\eta=0} = W|_{\eta=-1} = 0. \quad (14)$$

Решение (14) дает счетное множество собственных функций $W_n(\eta)$ и собственных значений β_{0n} , соответствующих нормальным модам внутренних волн, причем все β_{0n} действительны и $\beta_{01} > \beta_{02} > \dots > \beta_{0n} > 0$. В дальнейшем индекс n будем опускать, считая, что все выражения относятся к от-

дельной моде. Собственные функции уравнения для F_1 совпадают с собственными функциями однородного уравнения для F_2 . Поэтому, чтобы существовало ограниченное решение F_2 , необходимо, чтобы W было ортогонально к L . Из условия ортогональности получим уравнение для определения $U(\xi)$

$$\partial^2 U / \partial \xi^2 + \gamma U^2 + \beta_1 \alpha U = 0, \quad (15)$$

$$\gamma = -\beta_0 \int_{-1}^0 \Omega' W^2 d\eta + \mu \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \Omega (W')^2 W d\eta + \int_{-1}^0 \Omega' W' W^2 d\eta \right], \quad \alpha = \int_{-1}^0 \Omega W^2 d\eta, \quad (16)$$

причем предполагается, что $W(\eta)$ нормированы таким образом, что $\int_{-1}^0 W^2 d\eta = 1$.

Уравнение (15) совпадает со стационарным уравнением Кортевега — де Вриза, проинтегрированным один раз по ξ , и хорошо изучено (см., например, (3, 7)). Его решение в зависимости от соотношения констант интегрирования представляет собой либо уединенную волну (солитон)

$$U(\xi) = 2a \operatorname{ch}^{-2} (\sqrt{a\gamma/6\xi}) + b, \quad (17)$$

либо кноидальную волну

$$U(\xi) = \frac{2a}{s^2} \operatorname{dn}^2 \left(\sqrt{\frac{a\gamma}{3}} \frac{\xi}{s}, s \right) + b, \quad (18)$$

где a — амплитуда волны, b — аддитивная постоянная, а $\operatorname{dn}(x, s)$ — эллиптическая функция Якоби с модулем s , $0 < s < 1$. Здесь для определенности положено $\gamma > 0$. Используя условия периодичности (18), можно определить неизвестную величину β_1 .

Опуская промежуточные выкладки и учитывая, что $v = \omega/k$, где ω — частота, а k — волновое число, получим нелинейное дисперсионное соотношение

$$\omega = \frac{(kH)N_0}{\beta_0^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{(kH)^2}{2\beta_0\alpha} \left[1 - \frac{a^2\gamma^2}{6(2\pi)^2} - \frac{2\gamma}{(2\pi)^2} \bar{U}(a) + O(a)^3 \right] \right\}; \quad (19)$$

в (19) $\bar{U}(a) = \int_0^1 U(\xi) d\xi$ — среднее течение, вызываемое нелинейной волной.

Как видно из (19), частота волны ω зависит от квадрата амплитуды и не зависит от знака γ . Если $\gamma < 0$, то для получения решения можно использовать инвариантность (15) относительно преобразования $\xi \rightarrow -\xi$, $U \rightarrow -U$, $\gamma \rightarrow -\gamma$.

Схематическое изображение кноидальных волн, близких к последовательности солитонов ($s \rightarrow 1$), в случае $\gamma < 0$ и $\gamma > 0$ представлено на рис. 1а. Таким образом (при $\gamma < 0$), могут существовать уединенные внутренние волны типа впадин. Заметим, что, как известно, уединенные поверхностные волны могут иметь только вид возвышений. Полученные решения (18), (19) соответствуют каждой нормальной моде внутренних волн. Какая совокупность из этих мод реализуется в действительности, существенно зависит от начальных данных.

3. В качестве примера рассчитаем параметры нелинейных внутренних волн для некоторых характерных для океана распределений частоты Вайселя — Брента.

1) Пусть $N^2 = N_0^2 = \text{const}$, т.е. $\Omega \equiv 1$. Этот случай соответствует экспоненциальному распределению невозмущенной плотности с глубиной. Если использовать приближение Буссинеска при $N^2 = \text{const}$, то решения не будут отличаться от линейных волн, поэтому в данном случае интересно отказать от этого приближения. Однако учтем, что параметр μ в реальном

океане весьма мал ($\mu \approx 10^{-2}$). Нормированные собственные функции (14) и собственные значения при $N^2 = \text{const}$ имеют вид: $W_n(\eta) \approx \sqrt{2} \sin n\pi\eta + O(\mu)$, $\beta_0 \approx (n\pi)^2 + O(\mu)$, тогда $F_1(\xi, \eta) \approx \sqrt{2} \sin n\pi\eta U(\xi)$, где $U(\xi)$ дается (17) или (18), а

$$\gamma_n \approx \mu \frac{\sqrt{2}}{n\pi} [(-1)^n - 1] + O(\mu^2). \quad (20)$$

Из (20) видно, что для каждой нечетной моды $\gamma_n < 0$, а для четных мод $\gamma_n \approx 0$, т. е. общее решение будет совокупностью нелинейных волн, близких к отрицательным солитонам и синусоидальным волнам. В случае доминирования первой моды в мелководном море при $N^2 \approx \text{const}$ должно наблюдаться прохождение группы отрицательных солитонов. На рис. 16 изображены данные измерений внутренних волн на мелководье, взятые из (8).

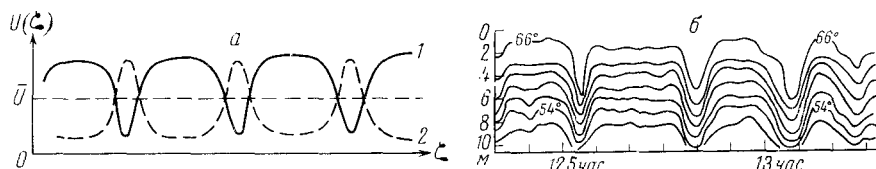


Рис. 1. Периодическая волна, близкая к последовательности солитонов ($1 - \gamma < 0$, $2 - \gamma > 0$) (а) и внутренние волны на мелководье (б). Изотермы в $^{\circ}\text{F}$ по данным (8)

Как видно из рис. 1, картина колебаний сильно напоминает прохождение группы отрицательных солитонов.

2) Рассмотрим двухслойную модель стратификации, т.е.

$$\rho_0 = \begin{cases} \rho_1 = \text{const} & \text{при } 0 > \eta > -l, \\ \rho_2 = \text{const} & \text{при } -l > \eta > -1, \end{cases} \quad (21)$$

где l — глубина слоя скачка. Тогда $\Omega = \delta(\eta + l)$, а собственные функции и собственное значение (14) имеют вид $W_1 = \sqrt{3}\eta/l$ при $0 > \eta > -l$; $W_2 = \sqrt{3}(1 + \eta)(1 - l)^{-1}$ при $-l > \eta > -1$; $\beta_0 = (1 - \mu)[l(l - 1)]^{-1}$. Далее получим $\alpha = 3$, а

$$\gamma = \frac{9\sqrt{3}}{2l^2(1-l)^2} \{ (1-2l) + \mu l^2 \}. \quad (22)$$

Из (22) видно, что использование приближения Буссинеска почти не меняет решения, так как $\mu \approx \Delta\rho/\rho \sim 10^{-3}$ и второй член в фигурных скобках (22) существенно меньше первого, если $l \neq 1/2$. При $l < 1/2$ $[1 + \mu/8] + O(\mu^2)$, т.е. если толщина верхнего слоя жидкости меньше нижнего, $\gamma > 0$ и солитоны будут положительны, в противоположном случае $\gamma < 0$ и солитоны отрицательны. При $l \approx 1/2$ $[1 + \mu/8] + O(\mu^2)$ имеем $\gamma \approx 0$ и волны будут синусоидальными; таким образом, эта глубина является критической.

Институт проблем механики и
Институт океанологии им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
19 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ R. R. Long, Tellus, v. 5, 42 (1953). ² A. M. Тер-Крикоров, Прикл. матем. и мех., т. 26, 6 (1962). ³ T. B. Benjamin, J. Fluid Mech., v. 25, 241 (1966). ⁴ L. Magaard, Kiel. Meeresforsch., v. 21, 22 (1965). ⁵ R. E. Davis, A. Acrivos, J. Fluid Mech., v. 29, 593 (1967). ⁶ В. М. Волосов, Асимптотические методы исследования нелинейных волн в стратифицированной среде с приложениями к теории внутренних волн в океане, М., 1972, стр. 35. ⁷ В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, «Наука», М., 1973. ⁸ E. C. La Fond, The Sea, v. 1, 1962, N. Y., p. 731.