Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 6

УДК 539.31 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. М. ЛИНЬКОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ, НАГРУЖЕННЫМИ УРАВНОВЕШЕННЫМИ СИСТЕМАМИ СИЛ

(Представлено академиком В. В. Новожиловым 24 IV 1973)

В теории трещин и горной геомеханике приходится рассматривать упругие тела с разрезами, на берегах которых заданы напряжения. Для плоскости построены решения некоторых задач такого рода ([1-7]). В данной работе получено интегральное уравнение общей задачи о конечном числе криволинейных разрезов в упругой плоскости. Из его анализа следует теорема существования решения и сходимость алгоритма Шварца для достаточно удаленных контуров.

Рассматривается задача о напряженном состоянии упругой плоскости с p разрезами L_j, $j=1, 2, \ldots, p$, каждый из которых является гладкой дугой. Фиксируем положительное направление обхода разрезов, направим нормаль n вправо от контура и обозначим начала дуг a_j, концы — b_j, $j=1, 2, \ldots, p$, а совокупность контуров — L. На берегах разрезов заданы напряжения класса H^* при узлах d_s, $s=1, 2, \ldots, m$, такие, что их главный вектор на каждом из разрезов равен нулю. Определения класса H^* и других классов, упоминаемых в статье, даны в работе ([8]). Совокупность точек a_j, b_j и d_s обозначим e_l, $l=1, 2, \ldots, 2p+m$. Без ограничения общности напряжения и вращение на бесконечности можно положить равными нулю.

Для решения этой задачи теории упругости достаточно найти голоморфные вне разрезов функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ ($z=x+iy$; xOy — декартова система координат), равные нулю на бесконечности и удовлетворяющие на берегах разрезов соотношениям

$$\overline{\varphi^\pm(t)}+\bar{t}\varphi'^\pm(t)+\psi^\pm(t)=\overline{f^\pm(t)}+\overline{C(t)}, \tag{1}$$

где t — комплексная координата точки на L,

$$f^\pm(t)=\int_0^{s_j}(-\sigma_{ny}{}^\pm+i\sigma_{nx}{}^\pm)\,ds \quad \text{на } L_j, \quad j=1, 2, \ldots, p,$$

s_j — длина дуги контура L_j, отсчитываемая от его начала a_j, $\sigma_{nx}{}^\pm$, $\sigma_{ny}{}^\pm$ — проекции граничных напряжений на оси Ox, Oy соответственно. Очевидно, что при равенстве нулю главного вектора сил, приложенных к обоим берегам каждого из разрезов, $f^+(a_j)=f^-(a_j)=0$, $f^+(b_j)=f^-(b_j)$, $j=1, 2, \ldots, p$. $C(t)$ — функция, принимающая постоянное значение C_j на разрезе L_j; постоянные C_j, $j=1, 2, \ldots, p$, находятся при решении задачи. Верхний индекс плюс означает передельное значение слева, а индекс минус — справа от разреза.

Значения $\varphi^\pm(t)$ имеют простой механический смысл:

$$\varphi^\pm=[f^\pm+C+2\mu(u_x{}^\pm+iu_y{}^\pm)]\,/\,(1+\varkappa),$$

где $u_x{}^\pm$, $u_y{}^\pm$ — проекции вектора смещений на оси Ox и Oy соответственно, 2μ — модуль сдвига, $\varkappa=3-4\nu$ при плоской деформации, $\varkappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ при плоском напряженном состоянии, ν — коэффициент Пуассона.

Относительно предельных значений функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем предполагать следующее:

1) $\varphi^{\pm}(t)$, $\bar{t}\varphi'^{\pm}(t)+\psi^{\pm}(t)\in H$;
2) $\varphi^{\pm\prime}(t)=\varphi'^{\pm}(t)$;
3) $\varphi'^{\pm}(t)$, $\psi^{\pm}(t)\in H^*$ при узлах e_l, $l=1, 2, \ldots, 2p+m$;
4) $\varphi^+(a_j)-\varphi^-(a_j)=\varphi^+(b_j)-\varphi^-(b_j)=0$, $j=1, 2, \ldots, p$.

При сделанных предположениях функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и постоянные C_j, $j=1, 2, \ldots, p$, определяются единственным образом.

Нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием того, чтобы функции $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ класса H были предельными значениями голоморфной вне L функции $\Phi(z)$, равной нулю на бесконечности, является равенство

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\Phi^+(\tau)-\Phi^-(\tau)}{\tau-t}\,d\tau. \tag{2}$$

Если $\Phi^{\pm}(t)$ имеют производные $\Phi^{\pm\prime}(t)$ класса H^* при узлах e_l, $l=1, 2, \ldots, 2p+m$, и $\Phi^+(a_j)-\Phi^-(a_j)=\Phi^+(b_j)-\Phi^-(b_j)=0$, $j=1, 2, \ldots, p$, то [8]

$$\Phi'^{\pm}(t)=\Phi^{\pm\prime}(t),\qquad \Phi^{+\prime}(t)+\Phi^{-\prime}(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\Phi^{+\prime}(\tau)-\Phi^{-\prime}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau. \tag{3}$$

Применяя равенство (2) к предельным значениям голоморфной вне L, равной нулю на бесконечности функции $\psi(z)$ и используя (1) и (3), получим

$$(\bar f^++\bar C-\bar\varphi^+-\bar t\varphi^{+\prime})+(\bar f^-+\bar C-\bar\varphi^--\bar t\varphi^{-\prime})=$$
$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{(\bar f^+-\bar\varphi^+-\bar\tau\varphi^{+\prime})-(\bar f^--\bar\varphi^--\bar\tau\varphi^{-\prime})}{\tau-t}\,d\tau. \tag{4}$$

При принятых допущениях предельные значения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ согласно (2) и (3) удовлетворяют равенствам

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\bar\varphi^+-\bar\varphi^-}{\bar\tau-\bar t}\,d\bar\tau-(\bar\varphi^++\bar\varphi^-)=0;\qquad -\frac{\bar t}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi_+{}'-\varphi_-{}'}{\tau-t}\,d\tau+\bar t\,(\varphi^{+\prime}+\varphi^{-\prime})=0.$$

Прибавляя эти равенства к (4), имеем

$$\bar\varphi^++\bar\varphi^--\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L(\bar\varphi^+-\bar\varphi^-)\,d\ln\frac{\tau-t}{\bar\tau-\bar t}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L(\varphi^+-\varphi^-)\,d\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}=$$
$$={}^1/_2(\bar f^++\bar f^-)+\overline{C(t)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\bar f^+-\bar f^-}{\tau-t}\,d\tau.$$

Это уравнение получено способом, аналогичным тому, который используется при выводе интегрального уравнения Н. И. Мусхелишвили ([9], [1]). Его можно вывести и непосредственно из уравнения Н. И. Мусхелешвили. Для этого достаточно соединить разрезы L линией, начинающейся и кончающейся на бесконечности, выписать уравнения Н. И. Мусхелишвили для каждой из областей, на которые при этом делится плоскость, сложить их и учесть непрерывность напряжений и смещений вне L и равенство нулю главного вектора сил, приложенных к каждому из разрезов.

Переходя к сопряженным величинам и используя (2), получим

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi^+-\varphi^-}{\tau-t}\,d\tau+k(\varphi^+-\varphi^-)=f_0(t), \tag{5}$$

где $k=k_1+k_2$; k_1, k_2 — операторы, определяемые формулами

$$k_1g=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L g(\tau)\,d\ln\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t};\qquad k_2g=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L g(\bar\tau)\,d\frac{\tau-t}{\bar\tau-\bar t};$$

$$f_0(t)={}^1/_2(f^++f^-)+C+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{f^+-f^-}{\tau-t}\,d\tau+k_1(f^+-f^-).$$

Сингулярное уравнение (5) подробно изучено ([8], [10]). Согласно постановке задачи, требуется найти его решение класса h_{2p}. Такое решение удовлетворяет условиям

$$\int_L \frac{t^j k(\varphi^+-\varphi^-)}{Z(t)}\,dt = \int_L \frac{t^j f_0(t)}{Z(t)}\,dt, \quad j=0, 1, \ldots, p-1, \tag{6}$$

где $Z(t)$ — каноническое решение класса h_{2p} ([8]). Если при некоторых значениях постоянных C_j, $j=1, 2, \ldots, p$, уравнение (5) имеет решение $\omega = \varphi^+-\varphi^-$ класса h_{2p}, то, полагая

$$\psi^+-\psi^- = \bar{f}^+-\bar{f}^- -\bar{\omega}-\bar{t}\omega', \quad \varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega}{\tau-z}\,d\tau;$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi^+-\psi^-}{\tau-z}\,d\tau,$$

получим голоморфные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ равные нулю на бесконечности и, как нетрудно видеть, определяющие решение рассматриваемой задачи теории упругости. Из общей теории ([8]) следует, что $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ удовлетворяют условиям 1) — 4), сформулированным выше.

Из единственности решения задачи теории упругости вытекает, что если решение уравнения (5) в классе h_{2p} существует, то оно единственно. Индекс для решения класса h_{2p} равен $-p$. Поэтому достаточными условиями его разрешимости в этом классе являются равенства ([8])

$$\mathrm{Re}\int_L f_0(t)\sigma_j(t)\,dt = 0, \quad j=1, 2, \ldots, 2p, \tag{7}$$

где σ_j, $j=1, 2, \ldots, 2p$, — полная система линейно-независимых решений класса h_0 при узлах a_j, b_j, $j=1, 2, \ldots, p$, однородного союзного уравнения. Условия (7) образуют систему $2p$ вещественных уравнений для $2p$ постоянных $\mathrm{Re}\, C_j$ и $\mathrm{Im}\, C_j$, $j=1, 2, \ldots, p$. Ее разрешимость следует из единственности решения. Отсюда вытекает, что решение уравнения (5), а следовательно, и рассматриваемой задачи теории упругости существует.

Уравнение (5) можно заменить эквивалентным в смысле разыскания решений класса h_{2p} уравнение Фредгольма $\varphi^+-\varphi^-+K^*k(\varphi^+-\varphi^-)=K^*f_0$ при дополнительных условиях (6). Здесь K^* — оператор, определяемый формулой

$$K_g^* = \frac{Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{g(\tau)\,d\tau}{Z(\tau)(\tau-t)},$$

$$K^*f_0 = {}^1/_2(f^+-f^-)+K^*\{{}^1/_2(f^++f^-)+C+k_1(f^+-f^-)\}.$$

Пусть $\omega=\varphi^+-\varphi^-$ — решение уравнения (5) класса h_{2p}. Оно, как упоминалось, обладает свойствами 1) — 4). Для производной $\omega'(t)$, используя их, имеем

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau + k_3\omega' = f_1(t), \tag{8}$$

где $k_3=k_4+k_5$; k_4, k_5 — операторы, определяемые формулами

$$k_4 g = -\frac{1}{2\pi i}\int_L g(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{\tau-t}\,d\tau,$$

$$k_5 g = \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{g(\tau)}\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}\,d\tau, \quad f_1=f_0'.$$

Функция $\omega'(t)$ принадлежит классу h_0 и удовлетворяет условиям

$$\int_{L_j} \omega'(t)\,dt=0, \quad j=1,2,\ldots,p. \tag{9}$$

Она легко интерпретируется в терминах механических и геометрических величин:

$$\omega'=\Big\{(\sigma_{nn}{}^{+}-\sigma_{nn}{}^{-})+i(\sigma_{nt}{}^{+}-\sigma_{nt}{}^{-})+$$

$$+2\mu\left[\frac{\partial(u_x{}^{+}-u_x{}^{-})}{\partial s}+i\frac{\partial(u_y{}^{+}-u_y{}^{-})}{\partial s}\right]e^{-i\alpha}\Big\}\Big/(1+\varkappa),$$

где σ_{nn}, σ_{nt} — проекции вектора напряжений на нормаль и касательную к контуру, α — угол, образованный касательной с осью Ox. Положительным направлением касательной считается направление обхода контура. Величины $f^{\pm\prime}(t)$ также имеют простой смысл: $f^{\pm\prime}=\sigma_{nn}{}^{\pm}+i\sigma_{nt}{}^{\pm}$.

Рассмотрим решение класса h_0 уравнения (8) при дополнительных условиях (9). Очевидно, что всякое такое решение даст функцию $\omega(t)=\int\limits_{a_j}^{t}\omega'\,d\tau$, $t\in L_j$, удовлетворяющую (5) и принадлежащую классу h_{2p}. Тогда из предыдущего следует, что решение уравнения (8) класса h_0 при условиях (9) существует и единственно.

Все решения класса h_0 уравнения (8) являются и решениями уравнения Фредгольма ([8])

$$\omega'(t)+K\omega'=f_2(t)+P_{p-1}(t)/Z(t), \tag{10}$$

где оператор K определяется формулой

$$Kg=\frac{1}{\pi iZ(t)}\int_L\frac{k_3gZ(\tau)}{\tau-t}\,d\tau, \quad f_2=\frac{1}{\pi iZ(t)}\int_L\frac{f_1Z\,d\tau}{\tau-t},$$

P_{p-1} — полином степени $p-1$. Его коэффициенты определяются условием (9).

Если в бесконечности на плоскости имеется лишь один разрез L_j, загруженный напряжениями $\sigma_{nx}{}^{\pm}$, $\sigma_{ny}{}^{\pm}$ такими, что $f^{+}=f^{-}$, то для этой задачи имеем

$$\omega_j'+K_j\omega_j'=f_2+C_j/Z, \quad \int_{L_j}\omega_j'\,dt=0. \tag{11}$$

Индекс j указывает, что задача решается для одного разреза L_j. Пусть M_j — оператор, определяющий ω_j' из системы (11). Используя операторы M_j, $j=1,2,\ldots,p$, и рассуждения, аналогичные приведенным в работах ([11], [12]), устанавливаем сходимость алгоритма Шварца для исходной задачи, если контуры расположены достаточно далеко один от другого.

Автор признателен С. Г. Михлину за полезные замечания.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт горной геомеханики и маркшейдерского дела
Ленинград

Поступило
17 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1966. [2] *B. S. Ramachandra Rao*, Appl. Sci. Res., Ser. A, v. 12, 1 (1963). [3] *W. T. Koiter*, Ingr.-Arch., v. 28, 168 (1959). [4] *В. Т. Койтер*, Сборн. Проблемы механики сплошной среды, М., 1961, стр. 202. [5] *Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон*, Сборн. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972, стр. 251. [6] *Р. В. Гольдштейн, Р. Л. Салганик*, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 3, 69 (1970). [7] *Р. В. Гольдштейн, Л. Н. Савова*, там же, № 2, 69 (1972). [8] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. [9] *Н. И. Мусхелишвили*, ДАН, т. 3, 1, 7 (1934). [10] *Г. Д. Манджевидзе*, ПММ, т. 15, 3, 279 (1951). [11] *Д. И. Шерман*, Тр. Сейсмологич. инст. АН СССР, № 54 (1935). [12] *С. Г. Михлин*, Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники, М.— Л., 1947.