

Н. Н. ВЕРИГИН, В. С. САРКИСЯН

О ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ С РАЗНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ  
И ВЯЗКОСТЬЮ ПРИ ЗАКАЧКЕ В ГАЛЕРЕЮ  
С ПОСТОЯННЫМ РАСХОДОМ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 25 II 1974)

Рассмотрим линейную задачу о нагнетании тяжелой жидкости в галерею, находящуюся в горизонтальном пласте, насыщенном легкой жидкостью (жидкости не смешивающиеся). При этом проницаемость пласта в горизонтальных направлениях будем считать конечной, а в вертикальных — равной бесконечности (предельно-анизотропная среда) <sup>(1)</sup>. Дебит нагнетания примем постоянным.

Область фильтрации разделяется на три зоны, зона I насыщена только нагнетаемой жидкостью, II — нагнетаемой и вытесняемой, а III — только вытесняемой (см. рис. 1).

Уравнения фильтрации для этих зон будут

$$\frac{\partial^2 P_I}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial P_I}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 P_{III}}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial P_{III}}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{k}{\mu_1} y \frac{\partial P_1}{\partial x} \right] = n_0 \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{k}{a_1 \mu_1} y \frac{\partial P_1}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{k}{\mu_2} (m-y) \frac{\partial P_2}{\partial x} \right] = n_0 \frac{\partial (m-y)}{\partial t} + \frac{k}{a_2 \mu_2} (m-y) \frac{\partial P_2}{\partial t}, \quad (3)$$

где  $k$  и  $n_0$  — проницаемость и пористость пород,  $\mu_{1,2}$  — вязкости нагнетаемой и вытесняемой жидкостей,  $y$  — ордината границы раздела,  $m$  — мощность пласта,  $a_{1,2}$  — пьезопроводности областей, занятых нагнетаемой жидкостью ( $a_1$ ) и вытесняемой ( $a_2$ ),  $P_{I,III}$  — давления на подошве пласта в зонах I и III,  $P_{1,2}$  — давления соответственно на подошве и кровле пласта в зоне II.

Из гипотезы о предельной анизотропности пород вытекает, что давления в каждой из жидкостей распределены по гидростатическому закону. Отсюда для второй зоны имеем

$$P_1 = P_2 + \Delta \gamma y + m \gamma_2, \quad \Delta \gamma = \gamma_1 - \gamma_2 > 0, \quad (4)$$

где  $\gamma_{1,2}$  — объемные веса нагнетаемой и вытесняемой жидкостей.

В случае нагнетания жидкости в пласт с постоянным дебитом краевые условия для системы (1) — (4) записываются так:

$$P_{III}(x, 0) = P_{III}(\infty, t) = P_i = \text{const}; \quad (5)$$

$$-\frac{km}{\mu_1} \frac{\partial P_1(0, t)}{\partial x} = 2q_1 = q = \text{const}; \quad (6)$$

$$P_I(l_2, t) = P_2(l_2, t) + m \gamma_1, \quad P_{III}(l_1, t) = P_1(l_1, t); \quad (7)$$

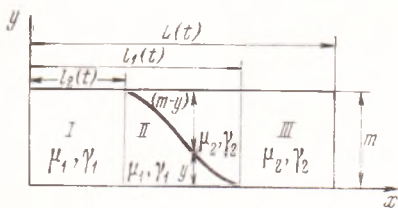


Рис. 1

$$q_I(l_2, t) = q_{II}(l_2, t), \quad q_{II}(l_1, t) = q_{III}(l_1, t), \quad (8)$$

где  $q_I = -km\mu_1^{-1}\partial P_I/\partial x$ ,  $q_{III} = -km\mu_2^{-1}\partial P_{III}/\partial x$ ,  $q_{II} = -ky\mu_1^{-1}\partial P_{II}/\partial x - k(m-y)\mu_2^{-1}\partial P_2/\partial x$ . Здесь  $l_{1,2}$  — расстояние от галереи до границы раздела — соответственно по подошве и кровле пласта,  $q$  — дебит галереи,  $q_I, II, III$  — расходы жидкостей в зонах  $I, II, III$  соответственно.

Кроме этих условий для границы раздела имеем

$$y(l_1) = 0, \quad y(l_2) = m. \quad (9)$$

Абсциссы границы раздела на подошве и кровле пласта находятся из следующих кинематических условий:

$$n_0 \frac{dl_{1,2}}{dt} = - \frac{k}{\mu_{1,2}} \frac{\partial P_{1,2}(l_{1,2}, t)}{\partial x}. \quad (10)$$

Для получения приближенного аналитического решения считаем, что движение в зонах  $I$  и  $II$  является жестким ( $a_{1,2} = \infty$ ). В третьей зоне течение примем упругим, но осредним член  $\partial P_{III}/\partial t$  по координате  $x$  и тогда он будет функцией только времени  $t$  (2). Введем также зону влияния  $x=L$ , считая, что вне этой зоны давление  $P=P_I$ .

Определяя из (4)  $\partial P_I/\partial x$  и подставляя результат в (2) при  $a_1 = \infty$ , получим

$$\frac{k}{\mu_1} \left[ \frac{\partial y}{\partial x} \left( \frac{\partial P_2}{\partial x} + \Delta\gamma \frac{\partial y}{\partial x} \right) + y \left( \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \Delta\gamma \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right] = n_0 \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (11)$$

Складывая (3) с (11) и интегрируя результат по  $x$ , найдем

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} = -\mu_0 \Delta\gamma \frac{y}{m + (\mu_0 - 1)y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{A_2 \mu_2}{k} \frac{1}{m + (\mu_0 - 1)y}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (12)$$

где  $A_2(t)$  — постоянная интегрирования.

Интегрируя (12) по  $x$ , найдем давление  $P_2$ :

$$P_2 = -\mu_0 m \Delta\gamma J_1 + A_2 \mu_2 k^{-1} J_2 + B_2, \quad (13)$$

$$J_1 = \int_0^{\bar{y}} \frac{\bar{y} d\bar{y}}{1 + (\mu_0 - 1)\bar{y}}, \quad J_2 = \int_0^{\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{1 + (\mu_0 - 1)\bar{y}}, \quad \bar{y} = y/m, \quad \bar{x} = x/m. \quad (14)$$

Интеграл  $J_1$  выражается так:

$$J_1(\bar{y}, \mu_0) = (\mu_0 - 1)^{-2} \{ (\mu_0 - 1)\bar{y} - \ln[1 + (\mu_0 - 1)\bar{y}] \}, \quad (15)$$

$$J_1(0, \mu_0) = 0, \quad J_1(1, \mu_0) = (\mu_0 - 1)^{-2} (\mu_0 - 1 - \ln \mu_0), \quad J_1(\bar{y}, 1) = 0,5\bar{y}^2.$$

Таким образом, если известно уравнение  $\bar{y}(x, t)$ , то интеграл  $J_2$  может быть вычислен по (14). Обозначим

$$J_2(l_1, t) = J_{21}, \quad J_2(l_2, t) = J_{22}. \quad (16)$$

Введя значение  $P_2$  по (13) в (4), получим

$$P_I = -m \Delta\gamma \mu_0 J_1 + A_2 \mu_2 k^{-1} J_2 + m \gamma_2 + m \Delta\gamma \bar{y} + B_2. \quad (17)$$

Осредним во втором уравнении (1) производную  $\partial P_{III}/\partial t$  по  $x$ , приняв ее равной  $A_3(t)$ . Полагая  $a_1 = \infty$  и интегрируя (1), получим

$$P_I = A_1 x + B_1, \quad P_{III} = A_3 x^2 + B_3 x + B_4. \quad (18)$$

Функции  $A_{1-3}(t)$  и  $B_{1-3}(t)$  определяются из пяти условий (6)–(8). Вместо условия на бесконечности (5) примем два условия на движущейся границе влияния  $x=L$  в виде

$$P_{III}(L, t) = P_I, \quad \partial P_{III}(L, t)/\partial x = 0. \quad (19)$$

Подставляя полученные таким образом значения  $A_{1-3}$ ,  $B_{1-4}$  в (13), (17) и (18) найдем давления в зонах I-III

$$P_I = P_l + \frac{q\mu_2}{2k} \left[ \bar{L} - \bar{l}_1 + 2(J_{21} - J_{22}) + \frac{2}{\mu_0}(\bar{l}_2 - \bar{x}) \right] + m\Delta\gamma - m\Delta\gamma\mu_0 J_1(1, \mu_0)$$

$$P_{II} = P_l + \frac{q\mu_2}{2k} [\bar{L} - \bar{l}_1 + 2(J_{22} - J_2)] - m\Delta\gamma\mu_0 J_1 + m\Delta\gamma\bar{y}, \quad (20)$$

$$P_{III} = P_l + \frac{q\mu_2}{2k} \frac{(\bar{L} - \bar{x})^2}{\bar{L} - \bar{l}_1}, \quad \bar{x} = \frac{x}{m}, \quad \bar{L} = \frac{L}{m}, \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{m}.$$

Давление в галерее находится из первого соотношения (20) при  $x=0$  и  $P_2$  из (4). Параметр  $L$  определяется из соотношения

$$\beta^* \frac{dw}{dt} = -\frac{k}{\mu_2} \frac{\partial P_{III}(l_1, t)}{\partial x}, \quad w = \int_{l_1}^L (P_{III} - P_l) dx, \quad (21)$$

где  $\beta^*$  — коэффициент упругости пласта в третьей зоне.

Из первого выражения (21) при  $q_{III}(l_1, t) = q = \text{const}$ , находим

$$w = \frac{q}{m\beta^*} t. \quad (22)$$

Подставляя значение  $P_{III}$  во второе соотношение (21), получим

$$w = \frac{q\mu_2}{6km} (L - l_1)^2. \quad (23)$$

Приравнивая правые части (22) и (23), будем иметь

$$L = l_1 + (6a_2 t)^{1/2}, \quad a_2 = k/(\mu_2 \beta^*). \quad (24)$$

Для нахождения закона движения границы раздела и ее длины  $l = l_1 - l_2$  подставим значение  $\partial P_2 / \partial x$  по (12) в (3). В результате получим

$$\frac{k}{\mu_2} \left\{ -\mu_0 \Delta\gamma \left[ \frac{y(m-y)}{m + (\mu_0 - 1)y} \right]' \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \Delta\gamma \frac{y(m-y)}{m + (\mu_0 - 1)y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\mu_2 A_2}{k} \left[ \frac{m-y}{m + (\mu_0 - 1)y} \right]' \frac{\partial y}{\partial x} \right\} = -n_0 \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (25)$$

Осредняя в (25) коэффициенты при производных  $(y_x')^2$ ,  $y_x''$  и  $y_x'$  получим соответственно 0,  $-m^{-1}$ ,  $m\alpha(\mu_0)$ , где

$$\alpha(\mu_0) = 0,5 - \mu_0(\mu_0 - 1)^{-3} [0,5(\mu_0^2 - 1) - 2(\mu_0 - 1) + \ln \mu_0]. \quad (26)$$

В частности, при  $\mu_0 = 1$  ( $\mu_1 = \mu_2$ )  $\alpha(\mu_0) = 1/6$ . С учетом (26) уравнение (25) примет вид

$$Dy_x'' - v\bar{y}_x' = \bar{y}_t', \quad (27)$$

$$D = km\Delta\gamma\alpha(\mu_0)/(n_0\mu_1), \quad v = q/(mn_0), \quad \bar{y} = y/m. \quad (28)$$

Решение уравнения (27) при условиях (9) будет

$$\bar{y} = \frac{\text{erf } \lambda - \text{erf } \lambda_1}{\text{erf } \lambda_2 - \text{erf } \lambda_1}, \quad \text{erf } \lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda e^{-u^2} du, \quad (29)$$

$$\lambda = \frac{x - vt}{2\sqrt{Dt}}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{l_{1,2} - vt}{2\sqrt{Dt}}. \quad (30)$$

Параметры  $\lambda_{1,2}$  находятся из условий (10):

$$\lambda_1 = \frac{\mu_0}{\alpha(\mu_0)} \cdot \frac{c_1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\lambda_1^2), \quad \lambda_2 = \frac{1}{\alpha(\mu_0)} \cdot \frac{c_1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\lambda_2^2), \quad (31)$$

$$c_1 = (\operatorname{erf} \lambda_2 - \operatorname{erf} \lambda_1)^{-1}. \quad (32)$$

Как показывают вычисления, в (31)  $\lambda_1 > 0$ , а  $\lambda_2 < 0$ . При  $\mu_0 = 1$  будет  $\lambda_1 = -\lambda_2 = 0,914$ .

Длина границы раздела  $l$  определяется по формуле

$$l = l_1(t) - l_2(t) = \chi \sqrt{\frac{K_0 m}{n_0} \frac{\Delta \gamma}{\gamma_1}} t, \quad \chi = 2(\lambda_1 - \lambda_2) \sqrt{\mu_0 \alpha(\mu_0)}, \quad (33)$$

где  $K_0 = k\gamma_1/\mu_1$  — коэффициент фильтрации.

Из (33) вытекает, что при  $\Delta \gamma = 0$  длина  $l = 0$ .

По экспериментальным данным<sup>(5)</sup> при  $\mu_0 = 1$  и 1,428 значения  $\chi = 1,58$  и 1,69 соответственно достаточно хорошо согласуются с теоретическими ( $\chi = 1,49$  и 1,8). Различие составляет примерно 6%.

В случае закачки легкой жидкости в тяжелую индексы при  $\gamma$ ,  $\lambda$ ,  $l$  меняются: 1 на 2 и 2 на 1.

Фильтрация в зоне II при жестком ее режиме в случаях  $q = \text{const}$  и  $P_0 = \text{const}$  рассматривалась в работах<sup>(3-5)</sup>. Фильтрация во всех зонах при упругом ее режиме,  $P_0 = \text{const}$  и  $\mu_1 = \mu_2$  исследована в работе<sup>(6)</sup>.

Интересно, что точка  $x = l_2$  на кровле пласта и примыкающая к ней верхняя часть границы раздела сначала движется в область  $x < 0$ , достигает максимального удаления  $l_2 = -l_{\max}$  и затем перемещается в обратном направлении. Подобная особенность получается также и в задаче<sup>(3)</sup>, где дебит галереи принят обратно пропорциональным  $t^{1/2}$  и дается точное решение на ЭВМ нелинейного уравнения типа (25). Это позволяет предполагать, что отмеченная выше особенность не связана с линеаризацией уравнения (25).

Всесоюзный научно-исследовательский институт водоснабжения, канализации, гидротехнических сооружений и инженерной гидрогеологии  
Москва

Поступило  
2 I 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Г. К. Михайлов, Инж. сборн., т. 15, М., 1953. <sup>2</sup> Ю. Д. Пирвердян, Нефтяная подземная гидравлика, 1956. <sup>3</sup> И. А. Чарный, Подземная гидрогазодинамика, 1963. <sup>4</sup> В. М. Шестаков, Научн. сообщ. Всесоюзн. н.-и. инст. водоснабж., канализации, гидротехнич. сооруж. и инж. гидрогеол. (ВОДГЕО), Водоснабжение, М., 1960. <sup>5</sup> Ф. М. Бочеввер, А. Е. Орадовская, Тр. лаб. инж. гидрогеологии ВОДГЕО, М., 1972. <sup>6</sup> Н. Н. Веригин, В. С. Саркисян, А. В. Шабанов. Механика жидкости и газа, № 6 (1973).