

Е. А. ГОРИН, В. Я. ЛИН

## О СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ НАД КОММУТАТИВНЫМИ БАНАХОВЫМИ АЛГЕБРАМИ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 2 IV 1974)

Пусть  $A$  — коммутативная банахова алгебра с единицей над полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел. Полином  $f$  над  $A$  называется унитарным, если коэффициент при его старшей степени равен единице. Дискриминантом унитарного полинома  $f$  называется элемент  $d_f$  алгебры  $A$ , который получается, если в выражении произведения  $\prod_{i \neq j} (t_i - t_j)$  через основные симметрические функции заменить последние на соответствующие коэффициенты полинома (с подходящими знаками). Группа обратимых элементов алгебры  $A$  обозначается через  $A^{-1}$ . Унитарный полином  $f$  называется сепарабельным, если  $d_f \in A^{-1}$ . Совокупность сепарабельных полиномов степени  $n$  обозначается через  $\mathfrak{A}_n(A)$ . Полином  $f \in \mathfrak{A}_n(A)$  называется приводимым, если он представляется в виде произведения двух унитарных полиномов положительной степени. Полином  $f \in \mathfrak{A}_n(A)$  называется вполне приводимым, если он представляется в виде произведения унитарных полиномов первой степени. Если пространство  $M_A$  максимальных идеалов алгебры  $A$  связно, то такое представление, когда оно возможно, осуществляется однозначно.

Из теоремы о неявных функциях для коммутативных банаховых алгебр вытекает, что (полная) приводимость всех полиномов класса  $\mathfrak{A}_n(C(M_A))$  (здесь и далее  $C(X)$  — алгебра всех непрерывных комплексных функций на компакте  $X$ ) влечет за собой (полную) приводимость (над  $A$ ) всех полиномов класса  $\mathfrak{A}_n(A)$ . Естественно возникает вопрос о том, верно ли обратное, т. е. определяются ли упомянутые свойства только топологией пространства максимальных идеалов. Один из основных результатов данной работы состоит в следующем: для любого  $k > 4$  существует такой конечный двумерный комплекс  $X$  и такая замкнутая конечно-порожденная подалгебра  $A$  алгебры  $C(X)$  с  $M_A = X$ , что при всяком  $n \leq 2k - 1$  все полиномы класса  $\mathfrak{A}_n(A)$  вполне приводимы, тогда как в  $\mathfrak{A}_n(C(X))$  имеются неприводимые полиномы.

Конструкция примеров основана, с одной стороны, на изучении коммутанта группы кос Артина <sup>(1)</sup> и представлений кос перестановками <sup>(2)</sup>, а с другой, — на выявлении специфических свойств группы Галуа полиномов с голоморфными коэффициентами. Описание комплекса  $X$  и алгебры  $A$  уже приводилось в работе <sup>(3)</sup>, однако там относительно этой алгебры было установлено гораздо меньше. Сформулированный выше результат с заменой  $2k - 1$  на  $k$  в случае  $k = 5$  был получен раньше первым из авторов, а затем, при помощи более сильных алгебраических средств <sup>(4)</sup>, для любого  $k > 4$  — вторым. В такой форме об этих результатах сообщалось на 6-й Всесоюзной топологической конференции (Тбилиси, октябрь 1972 г.). Предлагаемый здесь подход проще и дает больше \*.

\* Теорема 1 принадлежит первому из авторов, теорема 2 — второму. Ему же принадлежат алгебраические леммы, которые в соединении с теоремой 1 обосновывают построение примеров (что составляет содержание теорем 3 и 4).

1. Напомним некоторые факты. Пусть  $G_n$  — пространство сепарабельных полиномов  $\lambda^n + z_1 \lambda^{n-1} + \dots + z_n$  с постоянными комплексными коэффициентами. Пространство  $G_n$  естественно вложено в  $C^n$ . Фундаментальная группа  $\pi_1(G_n)$  изоморфна группе кос Артина  $B(n)$  из  $n$  нитей <sup>(3)</sup>. Группа  $B(n)$  обладает копредставлением (presentation) с  $n-1$  образующими  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  и определяющими соотношениями  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  при  $|i-j| \geq 2$  и  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ . Фактор-группа группы  $B(n)$  по ее коммутанту  $B'(n)$  изоморфна группе  $Z$  целых чисел. Копредставление коммутанта найдено в <sup>(1)</sup>. Там же имеется подробное изложение большинства из перечисленных ниже вспомогательных результатов. При любом  $n$  группа  $B'(n)$  допускает систему четырех образующих с конечным числом соотношений. Группа  $B'(3)$  — свободная группа ранга 2, группа  $B'(4)$  — полупрямое произведение двух свободных групп ранга 2. При  $n \geq 5$  группа  $B'(n)$  не имеет нетривиальных гомоморфизмов в абелевы группы (для доказательств можно воспользоваться соотношением  $\sigma_1 \sigma_3^{-1} = (\sigma_1 \sigma_2)^{-1} [\sigma_3 \sigma_1^{-1}, \sigma_1 \sigma_2^{-1}] (\sigma_1 \sigma_2)$ ). Группы  $\pi_i(G_n)$  с  $i \geq 2$  тривиальны. Более того, универсальная накрывающая  $G_n$  пространства  $G_n$  топологически эквивалентна клетке.

Если  $X$  — связный конечный клеточный комплекс, то полная приводимость всех полиномов класса  $\mathfrak{A}_n(C(X))$  равносильна отсутствию нетривиальных гомоморфизмов группы  $\pi_1(X)$  в  $B(n)$ . При  $n \leq 4$  это условие эквивалентно тривиальности группы  $H^1(X, Z) = \text{Hom}(\pi_1(X), Z)$  (чем и объясняется предположение  $k > 4$  в наших примерах), но при  $n \geq 5$  данные условия заведомо не эквивалентны.

Пусть  $A$  — полупростая коммутативная банахова алгебра, пространством  $M_A$  максимальных идеалов которой служит связный конечный клеточный комплекс. отождествим алгебру  $A$  с ее образом относительно гельфандова гомоморфизма  $A \rightarrow C(M_A)$ . Всякому полиному  $f \in \mathfrak{A}_n(A)$  естественно соответствует непрерывное отображение  $M_A \rightarrow G_n$ , которое мы будем обозначать той же буквой  $f$ . Если  $x \in M_A$ , то группой Артина (группой кос)  $\text{Art}_x(f)$  полинома  $f$  в точке  $x$  называется образ гомоморфизма  $f$ :  $\pi_1(M_A, x) \rightarrow \pi_1(G_n, f(x))$ . Группой Галуа  $\text{Gal}_x(f)$  полинома  $f$  в точке  $x$  называется группа перестановок корней полинома  $f(x)$ , возникающих при обходе всевозможных петель в точке  $x$ . Легко видеть, что группа Артина является расширением группы Галуа. Ясно, что приводимость полинома  $f$  эквивалентна интранзитивности группы Галуа, а полная приводимость — ее тривиальности.

Согласно теореме Аренса — Ройдена (см., например, <sup>(7)</sup>), для любой коммутативной банаховой алгебры  $A$  имеется канонический изоморфизм между  $H^1(M_A, Z)$  и фактор-группой  $A^{-1}$  по подгруппе экспонент  $\text{exp } A$ . В соответствии с этим каждому обратимому элементу алгебры  $A$  сопоставляется элемент группы когомологий. Индексом  $\text{ind}(f)$  полинома  $f \in \mathfrak{A}_n(A)$  мы будем называть элемент группы  $H^1(M_A, Z)$ , отвечающий  $d_f$ .

2. Следующая лемма составляет часть теоремы 1 из <sup>(2)</sup>.

**Лемма 1.** Если  $k > 4$  и  $n < k$ , то  $B'(k)$  не имеет нетривиальных гомоморфизмов в симметрическую группу  $S(n)$ .

**Лемма 2.** Пусть  $k = [n/2]$  и пусть  $\Gamma$  — транзитивная подгруппа в  $S(n)$ . Если  $\Gamma$  не имеет нетривиальных гомоморфизмов в  $S(k)$ , то  $\Gamma$  примитивна.

Из леммы 1 и (тривиальной) леммы 2 непосредственно вытекает

**Лемма 3.** Пусть  $k > 4$  и  $n < 2k$ . Тогда среди гомоморфных образов группы  $B'(k)$  в  $S(n)$  не существует транзитивных импримитивных групп.

3. Для каждого  $R > 1$  через  $K_R$  будем обозначать круговое кольцо  $R^{-1} \leq |z| \leq R$ . Букет  $K_R \vee \dots \vee K_R$  из  $l$  экземпляров таких колец, склеенных в точке  $z=1$ , обозначается  $K_R^{(l)}$ . Далее,  $A(K_R^{(l)})$  — алгебра всех функций, непрерывных на  $K_R^{(l)}$  и голоморфных внутри каждого из колец составляющих букет.

**Теорема 1.** Для любых  $l$  и  $n$  существует такое  $R_0 = R_0(l, n)$ , что при  $R > R_0$  группа Галуа (в точке склейки) всякого полинома  $f \in \mathfrak{A}_n(A(K_R^{(l)}))$ , индекс которого делится на  $n(n-1)$ , непримитивна.

**Теорема 2.** Существует такое  $R_0 = R_0(l, n)$ , что при  $R > R_0$  группа Галуа любого полинома  $f \in \mathfrak{A}_n(A(K_R^{(l)}))$ , индекс которого делится на все простые делители числа  $n$ , не может содержать  $n$ -цикла.

Поскольку при простом  $n$  транзитивная группа  $\Gamma \subset S(n)$  непременно содержит  $n$ -цикл, теорема 2 имеет

**Следствие 1.** Если  $n$  — простое число, то при  $R > R_0(l, n)$  все полиномы  $f \in \mathfrak{A}_n(A(K_R^{(l)}))$ , индекс которых делится на  $n$ , приводимы.

Так как группа Галуа любого сепарабельного полинома над алгеброй непрерывных функций на кольце  $K_R$  является циклической, то из теоремы 2 вытекает также

**Следствие 2.** Для любого  $n$  существует такое  $R_0 = R_0(n)$ , что при  $R > R_0$  всякий полином  $f$  из  $\mathfrak{A}_n(A(K_R))$ , индекс которого делится на все простые делители числа  $n$ , приводим.

**Замечания.** 1) Букеты  $K_R^{(l)}$  при увеличении  $R$  «исчерпывают» букет  $S^* \vee \dots \vee S^*$  проколотых в нуле комплексных прямых. Оказывается, что теоремы 1 и 2 имеют аналоги в более общей ситуации, когда  $(X_\alpha)$  — такое исчерпывание комплексного пространства  $X$  относительно компактными областями, что естественные гомоморфизмы  $\pi_1(X_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$  являются изоморфизмами (конечно, на пространство  $X$  приходится наложить еще те или иные дополнительные аналитические условия).

2) Так как транзитивная группа подстановок простой степени примитивна, то следствие 1 (правда, с заменой условия делимости индекса на  $n$  более сильным условием делимости его на  $n(n-1)$ ) может быть выведено из теоремы 1 (именно в такой форме оно было впервые получено первым из авторов); при рассмотрении более общих комплексных пространств этот путь предпочтительнее, ибо теорема 1 требует для своей справедливости менее жестких аналитических предположений о «предельном» пространстве  $X$ , чем теорема 2.

3) Простота числа  $n$ , как показал Ю. В. Зюзин, существенна для справедливости следствия 1 (даже в классе полиномов с нулевым индексом): для всякого составного  $n$  и любого  $R > 1$  он построил неприводимый полином степени  $n$  с дискриминантом 1 и голоморфными на букете двух проколотых дисков  $0 < |z| < R$ , склеенных в точке  $z=1$ , коэффициентами. Вместе с тем следствие 2 показывает, что при  $l=1$  простота  $n$  несущественна.

4) При четном  $n$  теорема 2 и следствие 2 тривиальны, поскольку если  $X$  — связный комплекс,  $f \in \mathfrak{A}_n(C(X))$  и  $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ , то подстановка  $\hat{\alpha} \in \text{Gal}_{x_0}(f)$ , отвечающая «петле»  $\alpha$ , и целое число  $\text{ind}(f)(\alpha)$  имеют одинаковую четность.

5) Если вместо алгебр  $A(K_R)$  рассмотреть алгебру  $A(D^*)$  всех голоморфных функций на проколотом диске  $D^* = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$ , то можно указать (довольно сложные) арифметические условия на пару чисел  $n$  и  $s$ , необходимые и достаточные для существования над  $A(D^*)$  неприводимого сепарабельного полинома степени  $n$  с индексом  $s$ .

**Теорема 3.** Пусть  $n$  — натуральное число и  $\Gamma$  — произвольная группа с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений. Тогда существует такой связный конечный двумерный симплициальный комплекс  $X$  и такая замкнутая конечно-порожденная подалгебра  $A$  алгебры  $C(X)$ , что

а)  $M_A = X$ ,

б)  $\pi_1(X) = \Gamma$ ,

в) группа Галуа любого полинома  $f \in \mathfrak{A}_k(A)$ ,  $k \leq n$ , индекс которого делится на  $k(k-1)$ , непримитивна.

Построение состоит в следующем. Сначала мы берем букет окружностей

тей в количестве, равном числу  $l$  образующих группы  $\Gamma$ , и заклеиваем их двумерными пленками, чтобы фундаментальная группа полученного комплекса стала изоморфной  $\Gamma$ . Затем берем букет  $K_R^{(l)}$  с достаточно большим  $R$  и отождествляем окружности  $|z|=1$  этого букета с соответствующими окружностями исходного букета. Получается комплекс  $X$ . Алгебру  $A$  составляют функции из  $C(X)$ , голоморфные внутри колец букета  $K_R^{(l)}$ . Выполнение условий а) и б), а также наличие конечного числа образующих у алгебры  $A$  довольно очевидно. Выполнение условия в) при больших  $R$  вытекает из теоремы 1.

**Теорема 4.** Пусть  $k > 4$ . Существует такой связный конечный двумерный симплициальный комплекс  $X$  и такая замкнутая конечно-породенная подалгебра  $A$  алгебры  $C(X)$ , пространство  $M_A$  максимальных идеалов которой совпадает с  $X$ , что при  $n < 2k$  каждый полином  $f \in \mathfrak{A}_n(A)$  вполне приводим, тогда как в  $\mathfrak{A}_n(C(X))$  имеются неприводимые полиномы.

**Доказательство.** Воспользуемся теоремой 3, где положим  $\Gamma = B'(k)$ . Поскольку  $G_k$  является комплексом  $K(\pi, 1)$  Эйленберга — Маклейна для группы  $\pi = B(k)$ , найдется такой полином  $f \in \mathfrak{A}_n(C(X))$ , что индуцированный гомоморфизм  $f_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(G_n)$  будет порождать естественное вложение  $B'(k)$  в  $B(k)$ . Группа Артина этого полинома изоморфна  $B'(k)$ , а его группа Галуа — знакопеременной группе; такой полином, конечно, неприводим. Вместе с тем всякий полином  $f \in \mathfrak{A}_n(A)$ ,  $1 < n \leq 2k-1$ , приводим. Действительно, предполагая противное, можно считать, используя условие  $H^1(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(B'(k), \mathbb{Z}) = 0$ , что имеется полином  $f \in \mathfrak{A}_n(A)$  с транзитной группой Галуа и  $d_i = 1$ . Однако тогда по лемме 3 его группа Галуа обязана быть примитивной, тогда как по теореме 3 она импримитивна. Теорема доказана. Заметим еще, что поскольку алгебра  $A$  обладает конечным числом образующих, компакт  $X$  можно так полиномально выпукло реализовать в подходящем  $S^m$ , что  $\mathfrak{A}_n$  совпадет с алгеброй пределов полиномов от  $z_1, \dots, z_m$ .

Авторам неизвестно, существуют ли над построенной выше алгеброй  $A$  неприводимые сепарабельные полиномы степени  $n \geq 2k$ . Отметим, что, согласно (7), для всякого  $k > 4$  существует такое многообразие Штейна  $X$ , что в  $\mathfrak{A}_n(C(X))$  имеются неприводимые полиномы, тогда как все сепарабельные полиномы с голоморфными на  $X$  коэффициентами вполне приводимы.

*Примечание при корректуре.* Теперь нам известна новая конструкция, которая позволяет указывать аналогичные примеры для любых  $4 < k < n$  и с заменой алгебры  $C(X)$  одномерным расширением алгебры  $A$ .

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
5 III 1974

Центральный экономико-математический институт  
Академии наук СССР  
Москва

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Е. А. Горин, В. Я. Лин, Матем. сборн., т. 78, 4, 579 (1969). <sup>2</sup> В. Я. Лин, УМН, т. 27, 3, 192 (1972). <sup>3</sup> Е. А. Горин, ДАН, т. 200, 2, 273 (1971). <sup>4</sup> В. Я. Лин, УМН, т. 28, 6, 192 (1973). <sup>5</sup> В. И. Арнольд, УМН, т. 23, 4, 247 (1968). <sup>6</sup> Т. Гамелин, Равномерные алгебры, М., 1973. <sup>7</sup> В. Я. Лин, ДАН, т. 201, № 1, 28 (1971).