

Член-корреспондент АН СССР А. А. КРАСОВСКИЙ

ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА И СУБОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

Плотность вероятности в пространстве состояний динамической системы

$$\dot{x}_i + f_i(x_1, \dots, x_n) = \xi_i, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где f_i — дифференцируемые необходимое число раз функции, $\xi_i = \xi_i(t)$ — белые гауссовские шумы со спектральными плотностями S_{ik} , подчиняется уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t} + Lp = 0, \quad (2)$$

где L — линейный дифференциальный оператор вида

$$L = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n S_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (3)$$

В работе (1) обоснован операционный или итерационный способ решения уравнения (2), при котором решение представляется в форме ряда

$$p = \left(1 - \frac{t}{1!} L + \frac{t^2}{2!} L^2 - \dots \right) p_0, \quad (4)$$

или символически $p = \exp(-tL)p_0$. Здесь $p_0 = p_0(x_1, \dots, x_n)$ — распределение в момент времени $t=0$ (начальное распределение). Указано простейшее достаточное условие равномерной сходимости ряда (4). Формула (4) может быть использована при отыскании переходной (измеряющейся во времени) плотности вероятности, причем чем меньше t , тем быстрее сходится ряд.

Равновесное распределение удовлетворяет уравнению $Lp=0$. Для систем, у которых $\sum_{i=1}^n \partial f_i / \partial x_i$ не равно тождественно нулю (так называемые неконсервативные системы (2)), равновесное распределение может определяться на основе ряда

$$p = p_n + (1 + D + D^2 + \dots) L p_n, \quad (5)$$

где D, L — линейные дифференциальные операторы вида

$$D = - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,k=1}^n \frac{1}{2} S_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \right), \quad (6)$$

$$L_* = D - 1 = L / \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

p_n — некоторое исходное приближенное решение уравнения $Lp=0$, получаемое, например, методом статистической линеаризации (3).

Допустим, что имеется процесс, описываемый уравнениями

$$\dot{x}_i + f_i(x_1, \dots, x_m) = \xi_i, \quad i=1, 2, \dots, m < n, \quad (7)$$

и имеются датчики (измерительная система), описываемые уравнениями

$$\dot{x}_{m+j} + f_{m+j}(x_1, \dots, x_n) = \xi_{m+j}, \quad j=1, 2, \dots, n-m. \quad (8)$$

Требуется найти алгоритм оценивания вектора состояния процесса $x_{(m)} = \|x_1 \dots x_m\|^T$.

В качестве оценок компонент x_i вектора состояния примем условные математические ожидания этих компонент при известных сигналах датчиков

$$\hat{x}_i = \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i p(x_1, \dots, x_m | x_{m+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_m. \quad (9)$$

Подставляя выражение (4), получим

$$\hat{x}_i = \beta \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i \left[\left(1 - \frac{t}{1!} L + \frac{t^2}{2!} L^2 - \dots \right) p_0 \right] dx_1 \dots dx_m, \quad (10)$$

где

$$\frac{1}{\beta} = \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{1!} L + \frac{t^2}{2!} L^2 - \dots \right) p_0 dx_1 \dots dx_m.$$

Для установившегося режима согласно (5)

$$\hat{x}_i = \gamma \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i [p_n + (1 + D + D^2 + \dots) L p_n]_{x_{m+j}} dx_1 \dots dx_m; \quad (11)$$

где

$$\frac{1}{\gamma} = \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} [p_n + (1 + D + D^2 + \dots) L p_n] dx_1 \dots dx_m.$$

Выражения (10), (11) можно рассматривать как алгоритмы оптимального, а при конечном числе учитываемых членов рядов — субоптимального оценивания. Для линейной системы

$$\dot{f}_i = \sum_{h=1}^n a_{ih} x_h$$

и нормального начального распределения

$$p_0 = \exp \left(A_0^0 + \sum_{i=1}^n A_i^0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n A_{ik}^0 x_i x_k \right)$$

текущее распределение также является нормальным

$$p = \exp \left(A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n A_{ik} x_i x_k \right),$$

где коэффициенты A_i определяются уравнениями ⁽²⁾

$$A_i - \sum_{p=1}^n a_{pi} A_p - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} A_{pi} A_{qj} = 0, \quad (12)$$

$$A_{ih} - \sum_{p=1}^n (a_{pi} A_{ph} + a_{ph} A_{pi}) - \sum_{p,q=1}^n S_{pq} A_{pi} A_{qh} = 0 \quad (13)$$

при начальных условиях

$$A_i(0) = A_i^0, \quad A_{ih}(0) = A_{ih}^0. \quad (14)$$

Интегралы (9) в этом случае могут быть вычислены в общем виде, а именно

$$\sum_{k=1}^m A_{ik} \hat{x}_k = -A_i \sum_{h=m+1}^n A_{ih} x_h, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

Выражения (12)–(14) описывают алгоритм оптимального оценивания в рассматриваемом линейном случае.

Если обозначить матрицы-столбцы

$$A_{(n)} = \|A_1 \dots A_n\|^T, \quad \hat{x}_{(m)} = \|\hat{x}_1 \dots \hat{x}_m\|^T, \quad x_{(n-m)} = \|x_{m+1} \dots x_n\|^T$$

и квадратные матрицы размера $n \times n$

$$a = \|a_{ik}\|, \quad S = \|S_{ik}\|, \quad A = \|A_{ik}\|,$$

причем последнюю матрицу представить в виде блоков

$$A = \begin{bmatrix} A_{(m,m)} & A_{(m,n-m)} \\ A_{(n-m,m)} & A_{(n-m,n-m)} \end{bmatrix},$$

то соотношения (12), (13), (15) принимают вид

$$A_{(n)} - a^T A_{(n)} - A S A_{(n)} = 0, \quad (16)$$

$$A - A a - a^T A - A S A = 0, \quad (17)$$

$$A_{(m,m)} \hat{x}_{(m)} = -A_{(m,m)} - A_{(m,n-m)} x_{(n-m)}. \quad (18)$$

Матрица, обратная и противоположная по знаку матрице $A_{(m,m)}$, есть ковариационная матрица ошибок оценивания

$$M_{\hat{x}\hat{x}} = -A_{(m,m)}^{-1}. \quad (19)$$

Матрица A является обратной и противоположной по знаку ковариационной матрице самих процессов $A = -M^{-1}$. Последняя удовлетворяет линейному уравнению

$$\dot{M} + aM + Ma^T = S. \quad (20)$$

В общей нелинейной задаче функции f_i представим в виде сумм линейных или нелинейных форм

$$f_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$$

и обозначим оператор

$$L_{\pi} = - \sum_{i=1}^n a_{ii} - \sum_{i,h=1}^n a_{ih} x_h \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,h=1}^n S_{ih} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_h}.$$

Тогда в соответствии с (10), (18) для нормального начального распределения

$$\begin{aligned} \hat{x}_{(m)} = & -\beta_* A_{(m,m)}^{-1} (A_{(m)} + A_{(m,n-m)} x_{(n-m)}) - \\ & - \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_{(m)} \left[\left(\frac{t}{1!} B_1 - \frac{t^2}{2!} B_2 + \dots \right) p_0 \right] dx_{(m)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$dx_{(m)} = dx_1 \dots dx_m, \quad B_1 = L - L_{\pi}, \dots, \quad B_v = L^v - L_{\pi}^v, \dots, \quad \beta_* = \beta \int_{-\infty}^{\infty} p dx_{(m)}.$$

а матрицы $A_{(m)}$, A определяются уравнениями (16), (17).

Для установившегося режима в предположении, что p_n соответствует линейной системе $f_i = \sum_{h=1}^n a_{ih} x_h$, из (11), (18) получаем

$$\hat{x}_{(m)} = -\gamma A_{(m,n)}^{-1} A_{(m,n-m)} x_{(n-m)} + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} x_{(m)} [(1+D+D^2+\dots) L_* p_n] dx_{(m)}, \quad (22)$$

где матрица A , а значит, и ее блоки $A_{(m,m)}$, $A_{(m,n-m)}$ определяются алгебраическим уравнением

$$Aa + a^* A + A S A = 0, \quad \gamma_* = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} p_n dx_{(m)}.$$

Полученные алгоритмы (21), (22) принципиально отличаются от фильтра Калмана вследствие различия в критерии оптимальности и условии наблюдаемости.

Поступило
8 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Красовский, В. Н. Буков, ДАН, т. 216, № 3 (1974). ² А. А. Красовский, Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем, «Наука», 1974.
³ И. Е. Казаков, Б. В. Доступов, Статистическая динамика нелинейных автоматических систем 1962.