Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 1

УДК 621.373:535

ФИЗИКА

М. М. ПОПОВ

ДИФРАКЦИОННЫЕ ПОТЕРИ КОНФОКАЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА С ЗЕРКАЛАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

(Представлено академиком В. А. Фоком 12 II 1974)

Рассмотрим трехмерный открытый резонатор, образованный двумя одинаковыми сферическими зеркалами с радиусом кривизны R, помещенными на расстоянии l друг от друга. Резонатор называется конфокальным, если $R=l$. Согласно данным [1], плотность тока $f(x, y)$ на зеркалах, соответствующая собственным колебаниям такого резонатора, является решением интегрального уравнения *

$$\lambda f(x,y)=\frac{k}{2\pi l}\iint\limits_{(S)}\exp\left\{-ik\frac{x\xi+y\eta}{l}\right\}f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{1}$$

В уравнении (1) интегрирование ведется в пределах поверхности зеркала S, k — волновое число, λ — спектральный параметр. Дифракционные потери энергии α_n за один проход в резонаторе определяются равенством $\alpha_n=1-|\lambda_n|^2$, где λ_n — n-собственное значение уравнения (1).

Большой интерес представляет поведение дифракционных потерь при увеличении размеров зеркал по сравнению с длиной волны возбуждаемых в резонаторе колебаний, точное при $(k/l)\rho^2\to\infty$, где ρ — характерный размер зеркала.

Для зеркал круглой и прямоугольной форм в работе Л. А. Вайнштейна [2] (см. также [3, 5]) получен замечательный результат. Если край зеркал представляет собой окружность радиуса r, то для симметричного собственного колебания с наименьшими дифракционными потерями ($n=0$)

$$\alpha_0^{(0)}=8\pi ce^{-2c}[1+O(1/c)] \tag{2}$$

при $c\to\infty$, где $c=(k/l)r^2$. Если же зеркала прямоугольные со сторонами длиной $2a$ и $2b$, то

$$\alpha_0^{(\text{п})}=4(\pi c_x)e^{-2c_x}[1+O(1/c_x)]+4(\pi c_y)^{1/2}e^{-2c_y}[1+O(1/c_y)] \tag{3}$$

при c_x, $c_y\to\infty$, где $c_x=(k/l)a^2$, $c_y=(k/l)b^2$. Для антисимметричного (по переменным x, y) колебания с минимальными потерями получаются формулы, отличающиеся от (2) и (3) предэкспоненциальными множителями.

Метод, примененный в работах [2–4], основан на том, что для зеркал круглой и прямоугольной форм получающееся после разделения переменных в (1) интегральное уравнение эквивалентно классической задаче Штурма — Лиувилля. Благодаря этому удается построить асимптотику при $c\to\infty$ собственных значений и собственных функций уравнения (1) и получить формулы (2), (3).

Если же форма края зеркал отличается от окружности и прямоугольника, то переменные в уравнении (1) не разделяются и упомянутый выше метод неприменим.

---

* Здесь обе части уравнения разделены на множитель $-ie^{ikl}$ по сравнению с работой [1].

Заметим, что из эвристических соображений для дифракционных потерь получается экспонента e^{-c} вместо правильной e^{-2c} в формулах (2) и (3), т. е. значительно более грубый результат. Поэтому остается неясным, сохраняется ли факт столь быстрого убывания дифракционных потерь с ростом размеров зеркал конфокального резонатора, если их форма отличается от круга или прямоугольника.

В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос. Будем считать, что уравнение края зеркал имеет вид

$$q(x, y)=0, \text{ где } q(-x, -y)=q(x, y); \tag{4}$$

при этом в резонаторе будут существовать симметричные и антисимметричные колебания.

Обозначим через S_i зеркало круглой или прямоугольной формы, край которого вписан в границу исходного зеркала S, а через S_e — зеркало, край которого описан около границы зеркал S (см. рис. 1). Таким путем получаем конфокальные резонаторы, вписанные и описанные по отношению к исходному резонатору. Пусть далее α_{0i} и α_{0e} — потери основного симметричного (антисимметричного) собственного колебания * соответственно вписанного и описанного резонаторов. В настоящей работе доказывается, что дифракционные потери α_0 основного симметричного (антисимметричного) колебания исходного резонатора не превосходят потерь основного симметричного (антисимметричного) колебания всякого вписанного и не меньше потерь основного симметричного (антисимметричного) колебания всякого описанного резонаторов, т. е.

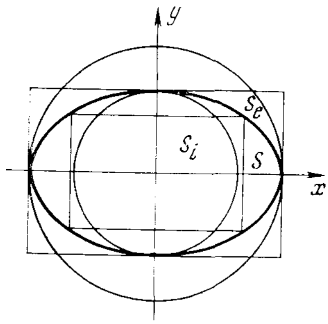

Рис. 1

$$\alpha_{0i} \geqslant \alpha_0 \geqslant \alpha_{0e}. \tag{5}$$

Рассмотрим, например, резонатор с эллиптической формой края зеркал $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, $a>b$. В качестве S_i возьмем круг радиуса b, а S_e — прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$ (см. рис. 1). При достаточно больших c_x, c_y из формул (2), (3) и неравенств (5) для дифракционных потерь α_0 основного симметричного колебания получаем

$$\alpha_0=A_0 e^{-2c_y}=A_0 e^{-2(k/l)b^2}, \tag{6}$$

причем $B_1 c_y \geqslant A_0 \geqslant B_2 (c_y)^{1/2}$ для некоторых постоянных B_1, B_2. Для основного антисимметричного колебания в формуле (6) изменится множитель A_0. Всякие деформации зеркала S в окрестности большой полуоси, при которых, однако, не пересекается внутренняя окружность радиуса b и стороны $y=\pm b$ описанного прямоугольника, не изменяют экспоненту в формуле (6) и сказываются только на предэкспоненциальном множителе.

Для зеркал произвольной формы из неравенств (5) следует, что показатель экспоненты в формуле для дифракционных потерь лежит между $-2(k/l)\rho^2_{\max}$ и $-2(k/l)\rho^2_{\min}$, где $\rho_{\min}$ и $\rho_{\max}$ — соответственно минимальное и максимальное расстояние от центра зеркала до его края. Пример эллипса и прямоугольника дает основание считать, что потери наиболее чувствительны к изменению $\rho_{\min}$.

Ниже приводится доказательство неравенств (5) для дифракционных потерь и их интерпретация в терминах геометрии гильбертова пространства.

* Основное собственное колебание (или основная мода) резонатора – это собственная функция уравнения (1), соответствующая наибольшему по модулю собственному значению.

Перейдем в уравнении (1) к безразмерным координатам $\xi'=(k/l)^{1/2}\xi$, $\eta'=(k/l)^{1/2}\eta$ и аналогично для x, y. Введем характеристическую функцию зеркала $\chi_S(x', y')$

$$\chi_S(x', y') = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x', y' \in S, \\ 0, & \text{если} \quad y', y' \notin S. \end{cases}$$

Умножение на χ_S функций, интегрируемых с квадратом модуля на всей плоскости (т. е. из пространства Гильберта L_2), определяет в L_2 ортогональный проектор P на подпространство функций, равных тождественно нулю вне зеркала S. Оператор K, определяемый правой частью уравнения (1), в L_2 можно записать в виде $K=PFP$, где F — преобразование Фурье

$$(Fh)(x', y') = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-i(x'\xi'+y'\eta')\} h(\xi', \eta')\, d\xi'\, d\eta'.$$

Пространство L_2 представим в виде ортогональной суммы $L_2 = L_2^{(c)} \oplus L_2^{(a)}$, где $L_2^{(c)}$ состоит из симметричных функций $h(x, y) = h(-x, -y)$, а $L_2^{(a)}$ — из антисимметричных $g(x, y) = -g(-x, -y)$. Ввиду того, что F переводит симметричные функции в симметричные, а антисимметричные — в антисимметричные и уравнения края зеркала S описывается четной функцией (4), подпространства $L_2^{(c)}$ и $L_2^{(a)}$ приводят оператор K, т. е. последний можно представить в виде суммы $K=K^{(c)}+K^{(a)}$. При этом собственные функции части $K^{(c)}$ оператора $K^{(a)}$ соответствуют симметричным собственным колебаниям резонатора, а собственные функции $K^{(a)}$ — антисимметричным.

Рассмотрим часть $K^{(c)}$ оператора K. Спектральное разложение преобразования Фурье F имеет вид $F = \sum\limits_{n=0}^{3} e^{-i(\pi/2)n} E_n$, где E_n — проектор на собственное подпространство, соответствующее собственному значению $e^{-i(\pi/2)n}$. Поскольку $E_0+E_2=I$ в $L_2^{(c)}$ (I — единичный оператор), для $K^{(c)}$ получаем

$$K^{(c)} = P(E_0-E_2)P = P - 2PE_2P = 2PE_0P - P. \qquad (7)$$

Из формулы (7) следует, что $K^{(c)}$ — самосопряженный оператор, и поскольку K является оператором Гильберта — Шмидта, то и его часть $K^{(c)}$ тоже оператор Гильберта — Шмидта (см. ([6])).

Пусть P_i и P_e — проекторы, соответствующие вписанному S_i и описанному S_e зеркалам. Для любой функции $h \in L_2^{(c)}$, очевидно, $(P_ih, h) \leqslant (Ph, h) \leqslant (P_eh, h)$, т. е. P_i, P, P_e образуют неубывающее семейство проекторов $P_i \leqslant P \leqslant P_e$. Из этого следует, принимая во внимание также формулу (7), что нормы самосопряженных операторов $K^{(c)}$, $K^{(c)}$, $K^{(c)}$ удовлетворяют неравенствам

$$\|K_i^{(c)}\| \leqslant \|K^{(c)}\| \leqslant \|K_e^{(c)}\|. \qquad (8)$$

Известно (см. ([6])), что каждый вполне непрерывный самосопряженный оператор имеет собственное значение, равное по модулю норме оператора. Поэтому из неравенств (8) для наибольших по модулю собственных значений λ_{0i}, λ_0, λ_{0e} операторов $K^{(c)}_i$, $K^{(c)}$, $K^{(c)}_e$ получаем $|\lambda_{0i}| \leqslant |\lambda_0| \leqslant |\lambda_{0e}|$. Отсюда уже следуют неравенства (5) для дифракционных потерь основного симметричного колебания. Приведенные рассуждения справедливы и для части $K^{(a)}$ оператора K, так как $K^{(a)} = iP(E_1-E_3)P$ и наличие множителя $-i$ не приводит к осложнениям. Неравенства (5) тем самым установлены и для основного антисимметричного колебания резонатора.

Укажем на геометрический смысл дифракционных потерь. Минимальный угол φ_j между подпространством финитных функций $PL_2^{(c)}$ и собственным подпространством $E_jL_2^{(c)}$, $j=0, 2$, оператора F определяется (см. ([7])) равенством

$$\cos\varphi_j = \sup_{h\in PL_2^{(c)},\, g\in E_jL_2^{(c)}} \frac{|(h, g)|}{\|h\|\,\|g\|}.$$

Нетрудно убедиться, что норма оператора PE_jP имеет следующий геометрический смысл: $\|PE_jP\|=\cos^2\varphi_j$. Используя формулу (7), находим $\|K^{(c)}\|=\max_{j=0,2}\{2\|PE_jP\|-1\}$. Предположим для определенности, что $\|PE_0P\|>\|PE_2P\|$, и пусть $K^{(c)}f_0=\lambda_0 f_0$, где λ_0 — наибольшее по модулю собственное значение. Из формулы (7) следует, что $PE_0Pf_0={}^1/_2(1+\lambda_0)f_0$, причем в рассматриваемом случае ${}^1/_2(1+\lambda_0)=\|PE_0P\|$.

Теперь для дифракционных потерь α_0 основного симметричного колебания f_0 резонатора получаем формулу

$$\alpha_0=4\cos^2\varphi_0(1-\cos^2\varphi_0),$$

а для собственной функции f_0 имеем $\|E_0f_0\|/\|f_0\|=\cos\varphi_0$.

Таким образом, дифракционные потери основного колебания конфокального резонатора определяются величиной минимального угла, образованного подпространством финитных функций PL_2 (равных нулю вне зеркала) с одним из собственных подпространств оператора F, описывающего резонатор с «бесконечными зеркалами». На собственной функции f_0 этот угол достигается, поэтому f_0 — это такая финитная функция, которая менее всего (в смысле нормы в L_2) отклоняется от соответствующего собственного подпространства оператора F.

Автор глубоко благодарен А. С. Благовещенскому и С. Ю. Славянову за консультации, В. С. Булдыреву и чл.-корр. АН СССР Л. А. Вайнштейну за обсуждение работы.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
16 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *A. G. Fox, T. Li,* Bell System Techn. J., v. 40, 489 (1961). [2] *Л. А. Вайнштейн,* В сб. Электроника больших мощностей, № 4, «Наука», 1965, стр. 106. [3] *Л. А. Вайнштейн,* Открытые резонаторы и открытые волноводы, 1966. [4] *D. Slepian,* Bell System Techn. J., v. 43, 3009 (1964). [5] *Н. В. Кузнецов,* Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 17, 66 (1970). [6] *Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман,* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1966. [7] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн,* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965.