

М. А. РВАЧЕВ

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МОНЖЕВСКОГО ТИПА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 6 XII 1973)

1. Пусть X — метрическое пространство с мерой μ и метрикой ρ , G — некоторое множество отображений $g: X \rightarrow X$, $g(\cdot): [0, 1] \rightarrow G$. Будем предполагать, что для каждого $x \in X$ и $t \in [0, 1]$ существует

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(g(t+\Delta t)x, g(t)x)}{\Delta t}, \quad (1)$$

который мы обозначаем $|\dot{g}(t)x|$.

Рассмотрим задачу

$$\int_A \int_0^1 |\dot{g}(t)x| dt d\mu \rightarrow \inf, \quad (2)$$

нижняя грань берется по всем $g(\cdot): [0, 1] \rightarrow G$, удовлетворяющим краевым условиям

$$g(i) \in G_i, \quad i=0, 1, \quad (3)$$

где $G_i \subset G$, $A \subset X$.

Задачу (1)–(3) мы называем задачей монжевского типа, ибо первые задачи этого вида были исследованы Г. Монжем^(1, 2). В настоящей работе даются решения двух конкретных задач вида (1)–(3).

2. Задача о перевозке прямоугольника в полуплоскость. Пусть $X = R^2 = \{(x_1, x_2)\}$ — евклидова плоскость, η — мера Лебега, G — множество отображений $X \rightarrow X$, сохраняющих меру μ . Отображения из G будем называть перевозками. Пусть, далее, A — прямоугольник с вершинами в точках $(\pm 1/2, 0)$, $(\pm 1/2, -a)$, $a > 0$; B — верхняя полуплоскость $B = \{x | x_2 \geq 0\}$, $G_0 = e$ — тождественное отображение, G_1 — множество перевозок, переводящих A в B .

Задачу (1)–(3) при описанных выше условиях мы называем задачей о перевозке прямоугольника в полуплоскость. В настоящей статье будем называть ее также задачей (4). Задачи типа (4) рассматривались Л. В. Канторовичем^(1, 2) и Г. Ш. Рубинштейном^(3, 4). Постановка задачи о перевозке квадрата на полуплоскость принадлежит Рубинштейну.

Назовем кривую $g(\cdot)x$ траекторией точки x . Перевозка $g: A \rightarrow B$ называется потенциальной^(4, 5), если существует функция $u(x)$, определенная на $A \cup B$, такая, что $|u(x) - u(y)| \leq \rho(x, y)$, $u(gx) - u(x) = -\rho(gx, x)$, $u(x) \geq u(y)$ при $y \in A \cup g(A)$, $x \in B \setminus g(A)$. Функция $u(x)$ называется потенциалом g .

Теорема 1. Перевозка $g_*(\cdot)$ минимальна в задаче (4) тогда и только тогда, когда:

1) $g_*(1)$ отображает A в область $g_*(1)(A)$, ограниченную в B гладкой кривой γ_* ;

2) функция $u(x) = -\rho(x, \gamma_*)$ при $x \in A \cup g_*(1)(A)$, $u(x) = 0$ при $x \in B \setminus g_*(1)(A)$ является потенциалом перевозки $g_*(1)$;

3) для каждого $x \in A$ траектория $g_*(\cdot)x$ принадлежит линии постоянства $\text{grad } u(x)$. При этом существуют числа $a_2 > a_1 > 1$ такие, что:

а) при $a \leq a_1$ перевозка $g_*(\cdot)$ может быть сделана непрерывной,

б) при $a_1 < a \leq a_2$ перевозка $g_*(\cdot)$ разрывна, линия обязательного разрыва $g_*(\cdot)$ имеет вид, показанный на рис. 1,

в) при $a > a_2$ линия обязательного разрыва $g_*(\cdot)$ имеет вид, показанный на рис. 2. (Пунктиром на рис. 1 и 2 показаны траектории $g_*(\cdot)x$.)

Покажем, как, используя теорему 1, можно построить уравнения для определения минимальной перевозки. Для каждого $x \in A \cup g_*(1)(A)$ линию постоянства $\text{grad } u(x)$ назовем линией перевозки $c(x)$, проходящей через точку x , обозначим линию перевозки через $c(x)$. Если $c(x)$ пе-

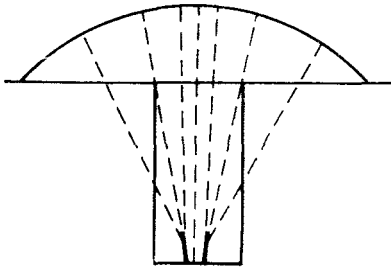


Рис. 1

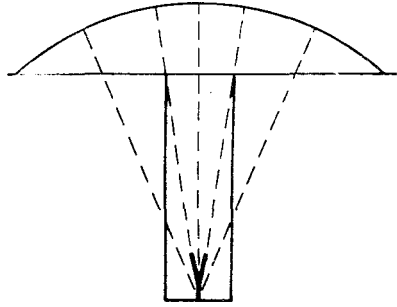


Рис. 2

ресекает отрезок $[-1/2, 1/2]$ оси Ox_1 , то обозначим через $r_1(x)$ длину $c(x)$, $\alpha_1(x)$ — угол от оси Ox_2 до $c(x)$, $R_1(x)$ — радиус кривизны кривой γ_* в точке $\gamma_* \cap c(x)$. Если $c(x)$ не пересекает отрезок $[-1/2, 1/2]$, то соответствующие величины обозначим через $r_2(x)$, $\alpha_2(x)$, $R_2(x)$. Пусть линия обязательного разрыва $g_*(\cdot)$ при $0 < x_2 < 1/2$ есть кривая $y(x_1) = (x_1, y(x_1))$, $-a < y < 0$, угол β определяется соотношением

$$dy/dx_1 = -\text{ctg } \beta. \quad (5)$$

В силу определения величин r_i , α_i , R_i и β имеем

$$d\alpha_i(y)/dx_1 = \sqrt{1 + (dy/dx_1)^2} \sin(\beta - \alpha_i) / (R_i - r_i), \quad i=1, 2. \quad (6)$$

Условие (3) теоремы 1 и условие сохранения площади дают

$$R_1^2 + (R_1 - r_1)^2 = 2(R_1 - r_1 - y/\cos \alpha_1)^2, \quad (7)$$

$$R_2^2 + (R_2 - r_2)^2 = [R_2 - r_2 - (1/2 - x_1)/\sin \alpha_2]^2 + (R_2 - r_2 - y/\cos \alpha_2)^2.$$

Из условий 2), 3) линия перевозки $c(y)$ ортогональна к γ_* , поэтому

$$dr_i(y)/dx_1 = -\sqrt{1 + (dy/dx_1)^2} \cos(\beta - \alpha_i), \quad i=1, 2. \quad (8)$$

Из определения $u(x)$ в 2)

$$r_1(y) = r_2(y). \quad (9)$$

Кривая y , обладающая свойством (9) по отношению к кривой γ_* , называется линией раздела γ_* . Для линий раздела верно равенство

$$\beta = 1/2(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (10)$$

Мы получили систему уравнений (5) — (10), определяющую множество линий перевозок минимальной перевозки $g_*(\cdot)$ при $0 < x_1 < 1/2$, $-a < y < 0$. При $x_1 = 0$ или $y = -a$ продолжение системы (5) — (10) строится аналогично тому, как это сделано в (5). Краевые условия для продолженной системы (5) — (10) находятся из условия 2). Множество $\{c(x)\}_*$ линий перевозок из продолженной системы (5) — (10) и краевых условий определяется однозначно. Из теоремы 1 следует, что всякая перевозка, множество линий перевозок которой совпадает с $\{c(x)\}_*$, является минимальной в задаче (4).

3. Обобщенная задача Улама. Пусть $X = R^2 = \{(x_1, x_2)\}$ — евклидова плоскость, $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $\mu = \mu_n + \mu_d$ — борелевская мера на R^2 ,

где μ_n — непрерывная, а μ_d — дискретная мера, сосредоточенная в точках x_i , G — группа изометрий R^2 , $G_0 = e$ — тождественное, $G_1 = g_1$ — некоторые отображения, A — замкнутое ограниченное множество конечной меры в R^2 .

Задачу (1)–(3) при перечисленных условиях назовем обобщенной задачей Улама. Будем ссылаться на нее как на задачу (*) Постановка задачи (*) в случае, когда μ — дискретная, сосредоточенная в двух точках мера дана С. Уламом (6).

Если g_1 — параллельный перенос, то решение задачи (*) очевидно: каждая траектория $g_*(\cdot)x$ есть отрезок прямой. Пусть в дальнейшем g_1 не есть параллельный перенос. Нетрудно показать, что в этом случае минимальное движение $g_*(\cdot)$ не является параллельным переносом ни при каких t . Такие движения плоскости можно представлять как вращения вокруг мгновенного центра вращения. Поэтому будем минимизировать (2) только по тем $g(\cdot)$, которые задаются парой $(x(\cdot), \alpha(\cdot))$, где $x(t)$ — координаты центра мгновенного вращения в момент t в движущейся системе координат (т. е. $x(\cdot)$ — подвижная центроида), $\alpha(t)$ — угол поворота движущейся системы координат относительно неподвижной в тот же момент. Если $(x(\cdot), \alpha(\cdot))$ задает $g(\cdot)$, то будем писать $g(\cdot) = (x(\cdot), \alpha(\cdot))$.

Рассмотрим функцию

$$m(x) = \int_A \|x - y\| d\mu(y). \quad (11)$$

Теорема 2. Минимальное движение $g_*(\cdot) = (x_*(\cdot), \alpha_*(\cdot))$ удовлетворяет уравнениям

$$\|\text{grad } m(x_*)\| = \|c\|, \quad (12)$$

$$\sin \alpha_* = (\text{grad } m(x_*) | c) \|c\|^{-1}, \quad (13)$$

при $x_* \neq x_i$. При $x_* = x_i$ минимальное движение есть поворот вокруг точки x_i на угол $\alpha_i = \alpha_{i+} - \alpha_{i-}$, где

$$\sin \alpha_{i\pm} = (\text{grad } m(x_*) |_{x_i^{\pm}} | c) \|c\|^{-1}. \quad (14)$$

При этом найдется такой вектор c , что определенное из (12)–(14) движение будет удовлетворять заданным граничным условиям.

Теорема 2 означает, что подвижная центроида при минимальном движении $g_*(\cdot)$ есть линия постоянства модуля $\text{grad } m(x)$, а угол поворота $\alpha_*(t)$ равен углу поворота $\text{grad } m(x_*(t))$ относительно подвижной системы координат, взятому с обратным знаком. В случае двухточечной задачи Улама из теоремы 2 немедленно следует геометрически наглядное решение.

4. Методы, использованные в п. 2 и 3, могут быть применены и для решения соответствующих задач в R^n . Отметим, что задачи типа (4) возникают при решении задачи оптимальных перевозок в экономике (см. (1, 2)), а задача (*) есть задача о минимуме работы силы трения при скольжении тела по плоскости с малой скоростью. В (6) указано, что задача (*) возникает также в гидромеханике.

В заключение выражаю глубокую признательность В. М. Тихомирову, под руководством которого выполнялась эта работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. В. Канторович, ДАН, т. 37, № 7–8, 227 (1942). ² Л. В. Канторович, УМН, т. 3, в. 2, 225 (1948). ³ Л. В. Канторович, Г. Ш. Рубинштейн, Вестн. Ленингр. ун-в., № 7, 52 (1958). ⁴ Г. Ш. Рубинштейн, УМН, т. 25, в. 5, 171 (1970). ⁵ М. А. Рвачев, Оптимизация, в. 9, (26), 1973, стр. 203. ⁶ С. Улам, Нерешенные математические задачи, «Наука», 1964.